Λ. ΚΙΣΕΛΕΦ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΓΙΑ ΤΙΝ 6-ι κε 7-ι ΤΑΚΣΙ
ΤΥ ΜΕΣΕΥ ΣΧΟΛΙΥ

ΜΕΡΟΣ
Ι

ΕΚΔΟΤΙΚΟ «ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ»
ΚΡΙΜΣΚΑΓΙΑ
1937

Λ. ΚΙΣΕΛΕΦ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΟΤΟ

ΓΙΑ ΤΙΝ 6-ι κε 7-ί ΤΑΚΣΙ
ΤΥ ΜΕΣΕΥ ΣΚΟΛΙΥ

Ενκρίθικε απ' το ΛΕΠ τις ΡΣΟΣΔ

Μετάφραςι: Δ. ΚΑΝΟΝΙΔΙ

ΕΚΔΟΣΙ ΤΡΙΤΙ

ΤΑ ΣΠΥΔΕΟΤΕΡΑ ΠΑΡΑΤΙΠΟΜΑΤΑ

ΣΕΛ.	ΣΙΡΑ	ΑΝΤΙ	ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΤΙ
59	8	$(a^4)^2 a^4.a^4$	$(a^4)^2 = a^4.a^4$
90	9	$\frac{3c}{2} \frac{a.5n.3p}{3m.5n.2p} \frac{2b.4m.2p}{5n.3m.2p}$	$\frac{3c}{2p} \frac{a.5n.2p}{3m\ 5n.2p} \frac{2b.3m.2p}{5n.3m.2p}$
108	3 απο κάτο	$10 - \frac{5}{8}x$	$10 = \frac{5}{8}x$
153	12	$x^2 = 6x = 27$	$x^2 + 6x = 27$
158	2	$3a(a + 4b^4)$	$3a(a^2 + 4b^4)$

ΕΚΔΟΤΙΚΟ „ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ"
ΚΡΙΜΣΚΑΓΙΑ
1937

Λ. ΚΙΣΕΛΕΦ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΟΤΟ

ΓΙΑ ΤΙΝ 6-ι κε 7-ι ΤΑΚΣΙ
ΤΥ ΜΕΣΕΥ ΣΚΟΛΙΥ

Ενκρίθικε απ' το ΛΕΠ τις ΡΣΟΣΔ

Μετάφρασι: Δ. ΚΑΝΟΝΙΔΙ

ΕΚΔΘΣΙ ΤΡΙΤΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟ „ΚΟΜΥΝΙΣΤΙΣ"
ΚΡΙΜΣΚΑΓΙΑ
1937

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΓΙΑ ΤΙΝ 11-ι ΕΚΔΟΣΙ

Το πρότο μέρος περιέχι όλα, όςα απετι το τελεφτέο πρόγραμα τυ ΛΕΠ για τιν 6-ι κε 7-ι τάκςι τυ μεςέυ ςκολιυ.

Ι κατάτακςι τυ ιλικυ αντιςτιχι ςτο πρόγραμα, εκτος απ' το μέρος τον αλγεβρικον κλαςμάτον. Για ενότιτα το μέρος αφτο μπίκε ς' ένα κεφάλεο, ενο ςίμφονα με το πρόγραμα, ένα μέρος τυ ιλικυ αφτυ παραδίνετε ςτιν 6-ι κε ένα μέρος, ςτιν 7-ι τάκςι. Ο δάςκαλος μπορι έφκολα να τα κςεχορίςι.

Σε τύτι τιν κενύργια έκδοςι τις άλγεβρας έχυνε διορθοθι όλα τα παρατιπόματα, καθος κε ι ανακρίβιες κε ι ςτριφνότιτα ςτι φράςι· ςε μερικα μέρι γενίκανε μικρες προςθίκες κε αλαγες, για να κατανοιθι καλίτερα το κίμενο.

Αφκςίθικε ο αριθμος τον αςκίςεον (ςτο πρότο μέρος ίταν 200, τόρα 297) κε ςτο τέλος τυ βιβλίυ δίνοντε απαντίςις ς' όλες τις αςκίςις.

Στι ςίντακςι τυ βιβλίυ αφτυ πίρε μέρος ο καθιγιτις Α. Ν. Μπαρςυκοφ, ςτον οπίο εκφράζο τι μεγάλι-μυ εβγνομοςίνι.

Α. Κίςελεφ.

Λενινγραντ, Οχτόβρις 1934.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΟΤΟ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΧΤΙΚΕΣ ΕΝΙΕΣ.

I. Αλγεβρικα ςίμβολα.

1. Χρίςι γραμάτον. α) Για τιν παράςταςι τον γενικον ιδιοτίτον τον αριθμον. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να παραςτίςυμε γραφτα μ'ένα ςίντομο τρόπο, ότι το γινόμενο δυο αριθμον δεν αλάζι, αν αλάκςυν ανάμεςά-τυς θέςις ο πολαπλαςιαςτις κε ο πολαπλαςιαςτέος. Σε παρόμια περίπτοςι, παραςτένοντας τον ένα απ' τυς αριθμυς αφτυς με το γράμα a κε τον άλο με το γράμα b, μπορύμε να γράπςυμε τιν ιςότιτα: $a \times b = b \times a$, ί ςιντομότερα: $ab = ba$. Πρέπι να ςιμιοθι, πος έγινε ςιμφονία μια για πάντα, ότι ςε περίπτοςι, πυ ανάμεςα ςε δυο γράματα, γραμένα ςτι ςιρα τόνα κοντα ςτ' άλο, δεν ιπάρχι κανένα ςιμίο, αφτο ςιμένι ότι ανάμεςα ς' αφτα πρέπι να ιπονοιθι το ςιμίο τυ πολαπλαςιαςμυ. Τον τρόπο, πυ αναφέραμε παραπάνο, τον μεταχιρίζοντε όςες φορες θέλυνε να παραςτίςυνε, ότι μια κάπια ιδιότιτα ανίκι ς' όλυς τυς αριθμυς κι όχι μονάχα ςε μερικυς κάπιυς απ' αφτυς.

Για τιν παράςταςι τον αριθμον μεταχιρίζοντε ςινίθος τα γράματα τυ λατινικυ (ίτε τυ γαλικυ) αλφάβιτυ .

β) Για τι ςίντομι παράςταςι τυ κανόνα, με τι βοίθια τυ οπίυ λίνυντε προβλίματα, όμια ος πρός τυς όρυς, μα διάφορα μόνο κατα το μέγεθος τον δομένον αριθμον.

Ας ιποθέςυμε, λ. χ., πος λίνυμε το πρόβλιμα:

Να βρεθυν τα $3^0/_0$ τυ αριθμυ 520.

Σκεφτόμαςτε έτςι:

Το $1^0/_0$ ενος κάπιυ αριθμυ αποτελι το $\frac{1}{100}$ αφτυ τυ αριθμυ·

επομένος:

$$\text{το}\ 1\%\ \text{τυ αριθμυ 520 αποτελι τα}\ \frac{520}{100} = 5{,}2\cdot$$

$$\text{τα}\ 3\%\ \text{„ „ „ αποτελυν τα}\ \frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6.$$

Λίνοντας παρόμια προβλίματα παρατιρύμε, πος για τιν έβρεσι τον εκατοστον ενος κάπιυ αριθμυ, αρκι να διερέσυμε τον αριθμο αφτο με το 100 κε να πολαπλασιάσυμε ίστερα το εκσαγόμενο επι τον αριθμο τον εκατοστον. Για να το παραστίσυμε αφτο εποπτικα, θα προτίνυμε για λίσι πρόβλιμα με παρόμια γενικι μορφι:

να βρεθυν τα $p\%$ τυ αριθμυ a.

Το πρόβλιμα αφτο θα το λίσυμε έτσι:

$$\text{το}\ 1\%\ \text{τυ αριθμυ}\ a\ \text{αποτελι τα}\ \frac{a}{100},$$

$$\text{τα}\ p\%\ \text{„ „ „ αποτελυν το}\ \frac{a}{100} \times p.$$

Παραστένοντας με το x τον ζιτύμενο αριθμο, μπορύμε να γράπσυμε τιν ισότιτα:

$$x = \frac{a}{100} \times p,$$

απ' τιν οπία ισότιτα φένετε αμέσος, πός μπορύμε να βρύμε τα εκατοστα οπιοδίποτε δομένυ αριθμυ.

Ας πάρυμε άλο παράδιγμα. Στιν αριθμιτικι τον κανόνα τυ πολαπλασιαζμυ τον κλαζμάτον τον εκφράζυμε με λόγια ος εκσις: για να πολαπλασιάσυμε κλάζμα επι κλάζμα, πρέπι να πολαπλασιάσυμε χοριστα τυς αριθμιτες κε χοριστα τυς παρονομαστες τον κλαζμάτον κε να διερέσυμε ίστερα το πρότο γινόμενο δια τυ δέφτερυ. Χρισιμοπιόντας τις παραστάσις με γράματα, μπορύμε να διατιπόσυμε τον κανόνα αφτον πολι σίντομα. Παραστένοντας διλ. τον αριθμιτι τυ πρότυ κλάζματος με το a, τον παρονομαστι με το b κε τυς αντίστιχυς όρυς τυ δέφτερυ κλάζματος με το c κε d, μπορύμε να γράπσυμε:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Δεν ίνε δίςχολο να καταλάβι κανις, ότι ι γραφι αφτι δίνι το γενικο κανόνα τυ πολαπλαςιαζμυ όλον τον κλαζμάτον, επιδι ςτι θέςι τον γραμάτον μπορι να ιπονοιθι οπιοςδίποτε αριθμος.

Με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο κε ο κανόνας τις διέρεςις κλάζμα δια κλάζματος μπορι να γραφι ος εκςις:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Πρέπι να ςιμιοθι, ότι κάθε ιςότιτα ίτε ανιςότιτα, πυ παραςτένι με τι βοίθια τον γραμάτον κε τον ςιμίον τον πράκςεον μια οπιοδίποτε ςχέςι ανάμεςα ςτυς αριθμυς, ονομάζετε τίπος.

Παραθέτυμε για παράδιγμα μερικυς τίπυς.

Αν μετρίςυμε τι βάςι κε το ίπςος ενος ορθογόνιυ με μια κε τιν ίδια μονάδα μάκρυς κε βρύμε, πος το μάκρος τις βάςις ίνε b κε το μάκρος τυ ίπςυς h, τότε το εμβαδο s τυ ορθογόνιυ αφτυ, πυ θα παραςτένετε ςτις αντίςτιχες μονάδες τις επιφάνιας, θα εκφραςτι με τον τίπο $s = bh$. Αν φιλάκςυμε τις ίδιες παραςτάςις, τότε για το εμβαδο τον τριγόνον θάχυμε τον τίπο:

$$s = \frac{1}{2} bh.$$

Απ' τι φιςικι μας ίνε γνοςτο, πος για τον καθοριζμο τυ ιδικυ βάρυς μιας οπιαςδίποτε υςίας πρέπι να διερέςυμε το βάρος τυ δομένυ ποςυ αφτις τις υςίας δια τυ όνκυ-τις. Παραςτένοντας το βάρος τυ ςόματος (ςε γραμάρια) με το p, τον όνκο-τυ (ςε κιβικα ςαντίμετρα) με το v κε το ιδικό-τυ βάρος με το d, μπορύμε τον κανόνα, πυ βγάζυμε για τον καθοριζμο τυ ιδικυ βάρυς, να τον παραςτίςυμε ςίντομα με τον τίπο:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Αλγεβρικι παράςταςι. Αν κάμποςι αριθμι, πυ ςιμιόνυντε με γράματα (ίτε με γράματα κε αριθμυς), ενόνοντε ανάμεςά-τυς με ςιμία, πυ δίχνυν πιές πράκςις κε με πιά ςιρα πρέπι να εχτελεςτυν πάνο ςτυς αριθμυς, τότε ι παράςταςι αφτι ονομάζετε αλγεβρικι.

Τέτιες, λ. χ., ίνε ι παράςτάςις: $\frac{a}{100} \times p, \ ab, \ 2x + 1.$

Για ςιντομία, ςιχνα, αντις «αλγεβριχι παράςταςι», θα πύμε απλα «παράςταςι».

Α ρ ι θ μ ι τ ι χ ι   τ ι μ ι μιας οπιαςδίποτε αλγεβριχις παράςταςις λέγετε το εχςαγόμενο, πυ θα προχίπςι, αν τα γράματα, πυ ιπάρχυνε ςτιν παράςταςι, τα αντιχαταςτίςυμε με οριζμένυς αριθμυς χε εχτελέςυμε τις πράχςις, πΰνε ςιμιομένες ς'αφτι. Ετςι, αν ίνε $p=3$ χε $a=520$, ι παράςταςι $\frac{a}{100}\times p$ θάχι τιμι:

$$\frac{520}{100}\times 3=5{,}2\times 3=15{,}6.$$

3. Ι πράχςις, πυ εχςετάζυντε ςτιν άλγεβρα, ίνε ι αχόλυθες: π ρ ό ς θ ε ς ι, α φ έ ρ ε ς ι, π ο λ α π λ α ς ι α ζ μ ο ς, δ ι έ ρ ε ς ι, ί π ς ο ς ι ς ε δ ί ν α μ ι χ' ε χ ς α γ ο γ ι ρ ί ζ α ς. Ι πρότες τέςερες πράχςις ίνε γνοςτες απ' τιν αριθμιτιχι. Ι πέμτι πράχςι — ι ίπςοςι ςε δίναμι — ίνε ιδιέτερι περίπτοςι τυ πολαπλαςιαζμυ. Στιν περίπτοςι αφτι έχυμε να πολαπλαςιάςυμε χάμποςυς ίςυς παράγοντες. Το γινόμενο τέτιον παραγόντον ονομάζετε δ ί ν α μ ι χι ο αριθμος, πυ δίχνι το πλίθος τον παραγόντον αφτον — ε χ θ έ τ ι ς τ ι ς δ ί ν α μ ι ς. Ο αριθμος, πυ ιπςόνομε ςε δίναμι, λέγετε β ά ς ι τ ι ς δ ί ν α μ ι ς. Το γινόμενο διο ίςον παραγόντον λέγετε δ έ φ τ ε ρ ι δ ί ν α μ ι, το γινόμενο τριον ίςον παραγόντον — τ ρ ί τ ι δ ί ν α μ ι χ. τ. λ. Ετςι ι δέφτερι δίναμι τυ 5 ίνε το γινόμενο 5×5, διλ. το 25, ι τρίτι δίναμι τυ $\frac{1}{2}$ ίνε το γινόμενο $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, διλ. το $\frac{1}{8}$. Π ρ ό τ ι δ ί ν α μ ι τυ αριθμυ ονομάζυν τον ίδιον τον αριθμο.

Ι δέφτερι δίναμι ονομάζετε αλιότιχα χε τ ε τ ρ ά γ ο ν ο, χ'ι τρίτι δίναμι χ ί β ο ς. Τέτιες ονομαςίες δοθίχανε, επιδι το γινόμενο $a\times a$ παραςτένι (ςε μονάδες επιφάνιας) το εμβαδο τετραγόνυ με πλεβρα a μονάδες μάχρυς, χε το γινόμενο $a\times a\times a$ παραςτένι (ςε μονάδες όνχυ) όνχο χίβυ με πλεβρα a μονάδες μάχρυς.

Για τιν εχςαγογι τις ρίζας δε θα χάνυμε αχόμα λόγο, γιατι ι πράχςι αφτι ςτιν αρχι τις άλγεβρας δεν εχςετάζετε.

4. Αλγεβριχα ςίμβολα. Για να παραςτίςυμε τις τέςερες πρότες πράχςις ςτιν άλγεβρα μεταχιριζόμαςτε τα ίδια ςιμία, πυ μεταχιριζόμαςτε χε ςτιν αριθμιτιχι, με μόνι τι διαφορα, πυ το ςιμίο τυ πολαπλαςιαζμυ, όπος ίπαμε παραπάνο, ςινίθος δε γράφε-

τε, αν ι διο, ίτε ο ένας απ' τυς παράγοντες παραςτένυντε με γράματα. Λ. χ. αντι $a \times b$ (ί αντι $a \cdot b$) γράφυν απλύςτατα ab κι αντι $3 \times a$ (ί $3 \cdot a$) γράφυν $3a$. Ος ςιμίο τις διέρεςις μεταχιριζόμαςτε χορις καμια διάκριςι ίτε 'τι διπλι ςτιγμι (:), ίτε τιν οριζόντια γραμι. Ι παραςτάςις λ. χ. $a : b$ κε $\frac{a}{b}$ παραςτένυν το ίδιο πράμα, δίχνυνε διλ., πος ο αριθμος a θα διερεθι με τον άλο αριθμο b..

Τις δινάμις τις παραςτένυνε ςίντομα ος εκςις: γράφυν ένα παράγοντα (βάςι τις δίναμις) κε λίγο πςιλα απ' αφτον προς τα δεκςια, γράφυν άλον αριθμο, τον εκθέτι τις δίναμις, πυ δίχνι πόςες φορες ο αριθμος, πυ ιπςόθικε ςε δίναμι, πρέπι να επαναλιφθι ςαν παράγοντας. Το 3^4 (διαβάζετε: τρία ςτιν τέταρτι δίναμι), αντικαταςτένι τι λεπτομεριακι παράςταςι:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Αν κοντα ς' ένα κάπιο αριθμο δεν ίνε ςιμιομένος εκθέτις, τότε ςαν εκθέτις τυ αριθμυ αφτυ ιπονοίτε ι μονάδα. Λ. χ. το a παραςτένι το ίδιο, ότι κε το a^1.

Ι ιςότιτα διο οπιονδίποτε παραςτάςεον παραςτένετε με το ςιμίο $=$, κ' ι ανιςότιτα με το ςιμίο $>$. Το μιτερο άκρο τυ ςιμίυ τις ανιςότιτας πρέπι να βρίςκετε πάντα αντίκρι ςτο μικρότερο αριθμο. Παραδίγματος χάρι:

$$5+2=7 \qquad 5+2<10 \qquad 5+2>6,$$

αφτο ςιμένι: το $5+2$ ιςύτε με το 7, το $5+2$ ίνε μικρότερο απ' το 10, το $5+2$ ίνε μεγαλίτερο απ' το 6.

5. Σιρα τον πράκςεον. Σχετικα με τι ςιρα, με τιν οπία πρέπι να εχτελεςτυν ι πράκςις, πυ ιποδίχνυντε ςτις αλγεβρικες παραςτάςις, γένικε ςιμφονία: **πρότα-πρότα να γίνι ι πράκςι τις ανότερις ςιρας, διλαδι ι ίπςοςι ςε δίναμι κε ι εκςαγογι ρίζας, ίςτερα ο πολαπλαςιαζμος κε ι διέρεςι κε τελεφτέα ι πρόςθεςι κε ι αφέρεςι.**

Ετςι, αν πρόκιτε, λ.χ., να βρεθι ι αριθμιτικι τιμι τις παράςταςις: $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$, τότε πρότα πρέπι να γίνι ι ίπςοςι ςε δίναμι (ο αριθμος a να ιπςοθι ςτο τετράγονο κι ο αριθμος b ςτον κίβο), ίςτερα ο πολαπλαςιαζμος κε ι διέρεςι (το 3 να πολαπλαςιαςτι επι το a^2 κε το εκςαγόμενο, πυ θα προκίπςι επι b, το b^3 να διερεθι με το c) κε τελεφτέα ι αφέρεςι κ' ι πρόςθεςι (απ' το $3a^2b$ ν' αφερεθι $\frac{b^3}{c}$ κε ςτο εκςαγόμενο να προςτεθι το d).

Οταν ι όρι τυ προβλίματος μας ανανκάζυνε να μιν ακολυθίσυμε τι σιρα τον πράκσεον, πυ ιποδίκσαμε, τότε μεταχιριζόμαστε τις π α ρ ε ν θ έ σ ι ς. Ι παρενθέσις δίχνυν, ότι ι πράκσις πάνο στυς αριθμυς, πυ ίνε μέσα στις παρενθέσις, πρέπι να εχτελεστύνε νορίτερα απ' τις άλες. Π. χ. ι παραστάσις:

$$5 + 7 \cdot 2 \text{ κε } (5 + 7) \cdot 2$$

δε σιμένυν το ίδιο πράμα. Στιν πρότι περίπτοσι πρέπι να πολαπλασιαστι το 7 επι το 2 κε στο εκσαγόμενο να προστεθι το 5 (θα βρύμε 19). Στι δέφτερι περίπτοσι πρέπι να προστεθι πρότα το 5 κε 7 κε το άθριζμα να πολαπλασιαστι επι το 2 (θα βρύμε 24).

Με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο κ' ι παράστασι:

$$(a + b)\, c - d,$$

σιμένι, πος πρότα-πρότα πρέπι να προστεθυν το a κε το b, ίστερα το εκσαγόμενο να πολαπλασιαστι επι το c κι απο κίνο, πυ θα βρεθι, ν' αφερεθι τελεφτέα το d.

Οταν παρυσιάζετε ανάνκι να κλιστι σε παρενθέσις παράστασι, πυ κ' ι ίδια έχι παρενθέσις, τότε στις νέες παρενθέσις δίνυν ένα κάπιο ιδιέτερο σχίμα. Ι παράστασι λ.χ.:

$$a\,\{b - [c + (d - e)]\}$$

σιμένι, πος απ' το d θ' αφερεθι το e, ι διαφορα, πυ θα προκίπσι, θα προστεθι με το c, το άθριζμα, πυ θα προκίπσι θ' αφερεθι απ' το b κε με τι διαφορα αφτι θα πολαπλασιαστι το a.

Τις παρενθέσις σινήθος τις ονομάζυν: στρονκίλες ( ), ανκίλες [ ] κε ικονικες { }.

Οταν κάπια παράστασι έχι κάμποσες παρενθέσις, τότε σινίθος εχτελύνε στιν αρχι τις πράκσις πάνο στυς αριθμυς, πυ βρίσκυντε κλιζμένι μέσα στις στρονκίλες, ίστερα πάνο στυς αριθμυς, πυ βρίσκυντε μέσα στις ανκίλες κε τελεφτέα πάνο στυς αριθμυς, πυ βρίσκυντε μέσα στις ικονικες παρενθέσις Εχτελόντας τις πράκσις, πύνε σιμιομένες μέσα στις παρενθέσις, εκσαλίφυμε ίτε, όπος λένε, «α ν ί γ υ μ ε» τις παρενθέσις. Ετσι στι παράστασι:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (6 - 2) - 3 \cdot (5 - 2)]\}$$

πρότα-πρότα ανίγυμε τις στρονκίλες παρενθέσις:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3]\}.$$

Ιςτερα ανίγυμε τις ανχίλες:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}.$$

Τελεφτέα ανίγυμε τις ικονικες παρενθέςις:

$$5 \cdot 6 = 30.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

1. Να παραςτιθι πρότα ι περίμετρος κ' ίςτερα το εμβαδο ενος τετραγόνυ, πυ έχι πλεβρα a μ.

2. Αν ι πλεβρα ενος κίβυ ίνε m ςμ, τότε πός θα παραςτιθι ι επιφάνιά-τυ κε πός ο όνκος-τυ;

3. Ενα ορθογόνιο έχι βάςι x μ κε ίπςος κατα d μ μικρότερο απ' τι βάςι Παραςτίςτε το εμβαδό-τυ.

4. Ενας διπςίφιος αριθμος έχι x δεκάδες κε y απλες μονάδες. Πόςες μονάδες το όλο έχι ο αριθμος αφτος;

5. Ενας τριπςίφιος αριθμος έχι a εκατοντάδες, b δεκάδες κε c απλες μονάδες. Με πιό τίπο μπορύμε να παραςτίςυμε τον ολικο αριθμο τον μονάδον, πυ περιέχυντε ςτον αριθμο αφτο;

6. Πίρανε a χγ τςάι πρότις πιότιτας κε τ' ανακατόςανε με b χγ τςάι δέφτερις πιότιτας. Ενα χιλιόγραμο τςάι τις πρότις πιότιτας κοςτίζι m ρόβλ. κ' ένα χιλιόγραμο τςάι τις δέφτερις πιότιτας n ρύβλ. Παραςτίςτε τιν τιμι ενος χιλιόγραμυ τυ μίγματος.

7. Να ςιμιοθι με τα ςιμία, πυ μεταχιρίζυντε ςτιν άλγεβρα: 1) το άθριςμα τον τετραγόνον τον αριθμον x κε y· 2) το τετράγονο τυ αθρίζματος τον ίδιον αριθμον· 3) το γινόμενο τον τετραγόνον τον αριθμον αφτον· 4) το τετράγονο τυ γινόμενύ-τυς· 5) το γινόμενο τυ αθρίζματος τον αριθμον a κε b επι τι διαφορά-τυς· 6) το πιλίκο τις διέρεςις τυ αθρίζματος τον αριθμον m κε n δια τις διαφοράς-τυς (το τελεφτέο να παραςτιθι με διο τρόπυς: με το ςιμίο : κε με τι γραμι).

8. Να βρεθυν ι αριθμιτικες τιμες τον ακόλυθον παραςτάςεον, αν ίνε $a = 20$, $b = 8$ κε $c = 3$:

1) $(a + b)c$· 2) $a + bc$· 3) $(a + b \quad a - b$·

4) $(a + b)(a - b)$· 5) $(a + b) : c$· 6) $\dfrac{a + b}{b - c}$.

9. Γράπςτε τιν παράςταςι, πυ θα προκίπςι, αν ςτο γινόμενο $3ab$ αντι τυ a βάλυμε το άθριςμα $x + y$ κε αντι τυ b τι διαφορα $x - y$.

ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΠΛΙΡΟΦΟΡΙΕΣ.

Ι λέκςι „άλγεβρα" έχι αραβικι προέλεφςι. Με τι λέκςι αφτι άρχιζε ο τίτλος τυ μαθιματικυ έργυ, πυ γράφικε απ' τον άραβα επιςτίμονα Α λ χ β α ρ ι ζ μ ι (ςτα 820).

Πρότος ςτιν Εβρόπι μεταχιρίςτικε τι λέκςι αφτι ος τίτλο ςτο μαθιματικό-τυ έργο ο ιταλος μαθιματικος Μ π ο μ π έ λ ι ςτα 1572. Σιγα-ςιγα αρχίςανε να μεταχιρίζοντε τι λέκςι αφτι κι όλι ι άλι μαθιματικι.

Τι ςιμαςία τις λέκςις αφτις θα τιν καταλάβετε, μόλις περάςετε το κεφάλεο τον εκςιςόςεον.

Γράματα για τιν παράστασι τον αριθμόν μεταχιρίστικε πρότος ο γάλος μαθιματικος Β ι έ τ α στα 1591. Ιστερα απ' αφτόνε μεγάλι χρίσι τον παραστάσεον με γράματα έκανε ο περίφιμος γάλος, φιλόσοφος κε μαθιματικος Ρ ε ν ε Ν τ ε κ α ρ τ (1596 — 1650).

Τα σιμία, πυ σίμερα μεταχιριζόμαστε στιν άλγεβρα, ισαχθίκανε απο διάφορυς μαθιματικος σε διάφορες εποχες. Προτίτερα, για παράστασι τον πράκσεον μεταχιρίζονταν λέκσις ολόκλιρες, ακόμα κε φράσις. Ι ανάνκι να εχτελεστύνε γριγορότερα ι πράκσις οδίγισε τυς ανθρόπυς στι σκέψι να αποπιραθύνε ν' αντικαταστίσυνε τις πιο σινθιζμένες λέκσις μ' άλες σιντομότερες, όσπυ στο τέλος ι λέκσις αφτες αντικατασταθίκανε με ιδιέτερα σιμία. Θ' αναφέρυμε το χρόνο τις εμφάνισις τον πιο σινθιζμένον σιμίον.

Τα σιμία τις πρόσθεσις κε τις αφέρεσις „+“ κε „—“ ισαχτίκανε απ' το γερμανο μαθιματικο Β ί ν τ μ α ν στα 1489. Πριν απ'αφτον τα χρισιμοπίισε ο ιταλος καλιτέχνις Λ ε ο ν ά ρ δ ο σ-ν τ α-Β ί ν τ σ ι.

Για παράστασι τις ισότιτας ο άνκλος μαθιματικος Ρ ε κ ο ρ ν τ μεταχιρίστικε (στα 1557) το σιμίο „=“, γιατι, — όπος έγραφε ο ίδιος, — δεν μπορύνε να τίχυνε διο άλα αντικίμενα πιο ίσα ανάμεσά-τυς, όσο διο παράλιλες εφθίες με το ίδιο μάκρος“ Αλος άνκλος μαθιματικος, ο Χ έ ρ ι ο τ ισίγαγε τα σιμία „>“ κε „<“ (στα 1631), κε τιν τελία ος σιμίο τυ πολαπλασιαζμυ.

Ο διάσιμος γερμανος μαθιματικος Λ έ ι μ π ι τ σ (στα 1694) πρότος ισίγαγε το σιμίο „:“ για παράστασι τις διέρεσις. Νορίτερα απ' αφτον ος σιμίο τις διέρεσις μεταχιρίζονταν τι γραμι.

Ι παρενθέσις ( ), [ ] κε { } σιναντύντε πρότι φορα στα έργα τυ φλαμανδυ μαθιματικυ Ζ ι ρ α ρ, (στα 1629.)

Ολα όμος αφτα τα σιμία δεν επικρατίσανε μονομιας. Μερικι μαθιματικι κσακολυθύσανε να μεταχιρίζυντε ενμέρι τα παλια σιμία. Τα αλγεβρικα σίμβολα με τι σιμερινί-τυς μορφι μπορύμε να πύμε, πος καθιερόθικαν οριστικα στο τέλος τυ XVIII εόνα. Μεγάλι επίδρασι εκσασκίσανε στιν επικράτισί-τυς τα έργα τυ μεγάλυ άνκλυ επιστίμονα Ι σ α α κ Ν ι ύ τ ο ν (1642 — 1727).

II. Ιδιότιτες τον πρότον τεσάρον αριθμιτικον πράκσεον.

Ας θιμιθύμε τις γνοστες πια απ' τιν αριθμιτικι κιριότερες ιδιότιτες τον πράκσεον τις πρόσθεσις, αφέρεσις, πολαπλασιαζμυ κε διέρεσις, γιατι θα χριαστί να τις χρισιμοπίισυμε στιν άλγεβρα πολι σιχνα.

6. Πρόσθεσι. α) **Το άθριζμα δεν αλάζι, αν αλάκσυμε τις θέσις τον προσθετέον** (νόμος τις αντιμετάθεσις ί ανταλαχτικι ιδιότιτα) Δ. χ:

$$3+8=8+3,\quad 5+2+4=2+5+4=4+2+5.$$

Γενικα:

$$a+b=b+a\quad a+b+c+\ldots=b+a+c+\cdots=$$
$$=c+a+b+\cdots$$

Τα αποςιοπιτιχα δίχνυν, πος ο αριθμος του προςθετέου μπορί ΐνε χε μεγαλίτερος απ' τυς τρις.

β) Το άθριζμα κάμποςον προςθετέον δεν αλάζι, ιν αντικαταςτίςυμε οςυςδίποτε προςθετέυς με το ίθριζμά-τυς (ςινδιαςτικος νόμος). Λ. χ:

$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15.$$
$$4 + 7 + 11 + 6 + 5 = 7 + (4 + 5) + (11 + 6) = 7 + 9 + 17 = 33.$$

Γενιχα:

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) \text{ κ.τ.π.}$$

Μεριχες φορες ο νόμος αφτος διατιπόνετε έτςι: τυς προςθετέυς μπορύμε να τυς ενόςυμε ςε ότι λογις ομάδες θέλυμε.

γ) Για να προςτεθι ς' ένα οπιονδίποτε αριθμο το άθριζμα πολον αριθμον, αρκι να προςτεθι μ' αφτόνε κάθε προςθετέος χοριςτα (ο ένας ίςτερα απ' τον άλο). Λ. χ:

$$5 + (7 + 3) = (5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15.$$

Γενιχα:

$$a + (b + c + d + \cdots) = a + b + c + d + \cdots$$

7. Αφέρεςι. α) Για να αφερεθι απο ένα κάπιο αριθμο το άθριζμα πολον αριθμον, αρκι ν' αφερεθι απ' αφτον κάθε προςθετέος χοριςτα (ο ένας ίςτερα απ' τον άλο) Λ. χ:

$$20 - (5 + 8) = (20 - 5) - 8 = 15 - 8 = 7.$$

Γενιχα:

$$a - (b + c + d + \cdots) = a - b - c - d - \cdots$$

β) Για να προςτεθι με ένα κάπιο άριθμο ι διαφορα διο άλον αριθμον, αρκι να προςτεθι με τον αριθμο αφτον ο μιοτέος κι απ' το άθριζμα, πυ θα προκίψι, ν' αφερεθι ο αφερετέος. Λ. χ:

$$8 + (11 - 5) = 8 + 11 - 5 = 14.$$

Γενιχα:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

γ) Για να αφερεθι απο ένα κάπιο αριθμο ι διαφορα διο άλον αριθμον, αρκι ν' αφερεθι απ' τον

αριθμο αφτον ο μιοτέος κε να προςτεθι ο αφερετέος, ίτε ςτιν αρχι να προςτεθι ο αφερετέος κε κατόπιν ν' αφερεθι ο μιοτέος. Λ. χ:

$$18 - (9 - 5) = 18 - 9 + 5 = 14,$$

ίτε

$$18 - (9 - 5) = 18 + 5 - 9 = 14.$$

Γενικα:

$$a - (b - c) = a - b + c,$$

ίτε

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

8. **Πολαπλαςιαζμος.** α) **Το γινόμενο δεν αλάζι, αν αλάκςυμε τι θέςι τον παραγόντον** (αντιμεταθετικος νόμος τυ πολαπλαςιαζμυ). Ετςι:

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4, \quad 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Γενικα:

$$ab = ba, \; abc\ldots = bac\ldots = cba\ldots$$

β) **Το γινόμενο πολόν παραγόντον δεν αλάζι, αν αντικαταςτίςυμε οςυςδίποτε παράγοντες με το γινόμενό-τυς** (ςινδιαςτικος νόμος τυ πολαπλαςιαζμυ). Ετςι:

$$7 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 7) = 5 \cdot 21 = 105.$$

Γενικα:

$$abc = a(bc) = b(ac) \text{ κ.τ.π.}$$

γ) **Για να πολαπλαςιαςτι οπιοςδίποτε αριθμος επι το γινόμενο πολον παραγόντον, αρκι να πολαπλαςιαςτι ο αριθμος αφτος επι τον πρότο παράγοντα, το εκςαγόμενο, πυ θα προκίπςι, να πολαπλαςιαςτι επι τον τον δέφτερο κ.τ.λ.** Ετςι:

$$3 \cdot (5 \cdot 4) = (3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Γενικα:

$$a(bcd\ldots) = (ab)\,cd\ldots$$

δ) **Για να πολαπλαςιαςτι γινόμενο πολον παραγόντον επι ένα οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να πο-**

λαπλαςιάςυμε επι τον αριθμο αφτον ένα απ' τυς παράγοντες τυ γινομένυ, αφίνοντας τυς άλυς χορις αλαγι. Ετςι:

$$(3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 3) \cdot$$

Γενικα:

$$(abc\ldots)\,m = (am)\,bc\ldots = a\,(bm)\,c\ldots \text{ κ.τ.π.}$$

ε) **Για να πολαπλαςιαςτι άθριζμα επι ένα οπιονδίποτε αριθμο, αρκι κάθε προςθετέος τυ αθρίζματος να πολαπλαςιαςτι επι τον αριθμο αφτον κε να προςτεθυν τα γινόμενα, πυ θα προκίπςυν.** Ετςι:

$$(5 + 3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7.$$

Γενικα:

$$(a + b + c + \ldots)\,m = am + bm + cm + \ldots$$

Βαςιζόμενι ςτον αντιμεταθετικο νόμο τυ πολαπλαςιαζμυ, μπορύμε τιν ιδιότιτα αφτι να τιν διατιπόςυμε ος εκςις: **Για να πολαπλαςιαςτι ένας οπιοςδίποτε αριθμος επι το άθριζμα πολον αριθμον, αρκι να πολαπλαςιαςτι ο αριθμος αφτος χοριςτα επι τον κάθε προςθετέο κε να προςτεθυν τα εκςαγόμενα, πυ θα προκίπςυν.** Ετςι:

$$5 \cdot (4 + 6) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6.$$

Γενικα:

$$m\,(a + b + c + \ldots) = ma + mb + mc + \ldots$$

Ι ιδιότιτα αφτι ονομάζετε ε π ι μ ε ρ ι ς τ ι κ ο ς νόμος τυ πολαπλαςιαζμυ, επιδι ο πολαπλαςιαζμος, πυ γίνετε επι το άθριζμα γίνετε χοριςτα επι τον κάθε προςθετέο τυ αθρίζματος.

ςτ) Ο επιμεριςτικος νόμος εφαρμόζετε κε ςτι διαφορα. Ετςι:

$$(8 - 5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot \qquad 7 \cdot (9 - 6) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6.$$

Γενικα:

$$(a - b)\,c = ac - bc \cdot \qquad a(b - c) = ab - ac,$$

δλ. **για να πολαπλαςιαςτι διαφορα επι ένα οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να πολαπλαςιαςτύνε χοριςτα επι τον αριθμο αφτον ο μιοτέος κι ο αφερετέος**

κε απ' το πρότο εκςαγόμενο ν' αφερεθι το δέφτερο· για να πολαπλαςιαςτι ένας οπιοςδίποτε αριθμος επι διαφορα, αρκι ο αριθμος αφτος να πολαπλαςιαςτι χοριςτα επι το μιοτέο κε τον αφερετέο κι απ' το πρότο εκςαγόμενο ν' αφερεθι το δέφτερο.

9. **Διέρεςι.** α) Για να διερεθι άθριζμα μ' ένα οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερεθι χοριςτα κάθε προςθετέος με τον αριθμο αφτον κε να προςτεθυν τα πιλίκα:

$$(30+12+5):3=\frac{30}{3}+\frac{12}{3}+\frac{5}{3}=10+4+1\frac{2}{3}.$$

Γενικα:

$$(a+b+c+\ldots):m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\ldots$$

β) Για να διερεθι ι διαφορα μ' ένα οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερεθύνε με τον αριθμο αφτο χοριςτα ο μιοτέος κι ο αφερετέος κε ν' αφερεθι απ' το πρότο εκςαγόμενο το δέφτερο:

$$(20-8):5=\frac{20}{5}-\frac{8}{5}=4-1\frac{3}{5}.$$

Γενικα:

$$(a-b):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

γ) Για να διερεθι γινόμενο κάμποςον παραγόντον μ' ένα οπιονδίποτε αριθμο, αρκι να διερέςυμε ένα απ' τυς παράγοντές-τυ με τον αριθμο αφτον, αφίνοντας τυς άλυς χορις αλαγι:

$$(40\cdot 12\cdot 8):4=10\cdot 12\cdot 8=40\cdot 3\cdot 8=40\cdot 12\cdot 2.$$

Γενικα:

$$(abc\ldots):m=(a:m)\,bc\ldots=a\,(b:m)\,c\ldots \text{ κ.τ.λ.}$$

δ) Για να διερεθι ένας οπιοςδίποτε αριθμος δια τυ γινομένυ πολόν παραγόντον, αρκι να διερεθι ο αριθμος αφτος με τον πρότο παράγοντα, το

εκςαγόμενο, που θα προκίπςι, να διερεθι με το δέφτερο κ. τ. λ.:

$$120 : (2 \cdot 5 \cdot 3) = [(120 : 2) : 5] : 3 = (60 : 5) : 3 = 12 : 3 = 4.$$

Γενικα:

$$a : (bcd \ldots) = [(a : b) : c] : d \ldots \quad \text{κ.τ.λ.}$$

ε) Θ' αναφέρυμε ακόμα κε τιν ακόλυθι ιδιότιτα τις διέρεςις. **Αν ο διερετέος κι ο διερέτις πολαπλαςιαςτυν (ί διερεθυν) με τον ίδιο αριθμο, το πιλίκο δεν αλάζι.**

Ας εκςελένκςυμε αφτι τιν ιδιότιτα πάνο στα ακόλυθα διο παραδίγματα.

$$1) \quad 8 : 3 = \frac{8}{3}.$$

Ας ιποθέςυμε, ότι πολαπλαςιάζυμε το διερετέο κε το διερέτι με τον ίδιο αριθμο, με το 5. Στιν περίπτοςι αφτι το νέο πιλίκο θα ίνε:

$$(8 \cdot 5) : (3 \cdot 5) = \frac{40}{15},$$

πυ ίςτερα απ' τιν απλοπίιςι τυ κλάζματος με το 5 θα δόςι το προιγύμενο πιλίκο $\frac{8}{3}$.

$$2) \quad \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}.$$

Πολαπλαςιάζυμε το διερετέο κε το διερέτι επι το $\frac{2}{7}$ τότε θάχυμε νέο πιλίκο:

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7}\right),$$

πυ ςίμφονα με τυς κανόνες τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις διέρεςις τον κλαζμάτον, ίνε ίςο:

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} : \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2\,(6 \cdot 7)}{4 \cdot 7\,(5 \cdot 2)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}.$$

Το πιλίκο αφτο ίςτερα απ' τιν απλοπίιςι με το 2 κε το 7 θα δόςι το προιγύμενο πιλίκο $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}$.

Γενικα, οπιοδίποτε κε νἆταν ι αριθμι a, b κε m, πάντα (am): $:(bm) = a:b$, πυ μπορι να γραφι κ' έτςι:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} \cdot$$

Αν το πιλίκο δεν αλάζι, όταν πολαπλαςιάζυμε το διερετέο κε το διερέτι επι τον ίδιο αριθμο, τότε αφτο δεν αλάζι κε όταν διερύμε το διερετέο κε το διερέτι με τον ίδιο αριθμο, επιδι ι διέρεςι με ένα οπιονδίποτε αριθμο ίνε ιςοδίναμι με πολαπλαςιαςμο επι τον αντίςτροφο αριθμο.

10. Εφαρμογι τον ιδιοτίτον τον πράκςεον. Τις ιδιότιτες τυν πράκςεον, πυ αναφέραμε, μπορύμε να τις χριςιμοπιίςυμε για το μεταςχιματιςμο τον αλγεβρικον παραςτάςεον, λ. χ:

α) $a + b + a + 2 + b + a + 8$. Εποφελύμενι τι ςινδιαςτικι ιδιότιτα τις πρόςθεςις, χορίζυμε ςε ομάδες τυς προςθετέυς με τον ακόλυθο τρόπο:

$$(a + a + a) + (b + b) + (2 + 8).$$

Το άθριςμα αφτο ςιντομότερα γράφετε έτςι:

$$(a \cdot 3) + (b \cdot 2) + 10,$$

πυ εποφελύμενι τιν αντιμεταθετικι ιδιότιτα τις πρόςθεςις, μπορύμε να το κςαναγράπςυμε έτςι:

$$3a + 2b + 10.$$

β) $a + (b + a)$. Για να προςτεθι ςτον αριθμο a το άθριςμα $(b + a)$, αρχι να προςτεθι το a το b κ' ίςτερα ακόμα ένα a· τότε θἄχυμε $a + b + a$. Χορίζυμε ςε ομάδες τυς προςθετέυς έτςι:

$$(a + a) + b.$$

Το άθριςμα αφτο ςίντομα γράφετε έτςι:

$$a \cdot 2 + b, \text{ ίτε } 2a + b.$$

γ) $a \cdot (3x^2 a)$. Για να πολαπλαςιαςτι ο αριθμος a επι το γινόμενο $3x^2 a$, αρχι να πολαπλαςιαςτι επι το 3, το εκςαγόμενο, πυ θα προκίπςι, να πολαπλαςιαςτι επι το x^2 κ.τ.λ. Θἄχυμε $a3x^2 a$. Το γινόμενο αφτο γράφετε κ' έτςι: $3a^2x^2$, διλ. φροντίζυμε να γράφυμε τα γράματα με τιν αλφαβιτικί-τυς ςιρα κε να βάζυμε μπροςτα απ' τιν παράςταςι τον αριθμιτικο ςιντελεςτι.

δ) $\left(\frac{1}{5} ax\right) \cdot 10$. Για να πολαπλαςιαςτι το γινόμενο αφτο

επι το 10, αρχι να πολαπλασιαςτι επι το 10 ένας οπιοςδίποτε απ' τυς παράγοντές-τυ. Πολαπλαςιάζυμε το $\frac{1}{5}$ επι το 10· τότε θάχυμε $2ax$.

ε) $(a+x+1)\cdot 3$. Σίμφονα με τιν επιμεριςτικι ιδιότιτα τυ πολαπλασιαςμυ θάχυμε:

$$(a\cdot 3)+(x\cdot 3)+(1\cdot 3),$$

πυ μπορι να γράφι ςιντομότερα έτςι:

$$3a+3x+3.$$

ςτ) $\frac{9ab}{3}$. Για να διερεθι το γινόμενο $9ab$ δια τυ 3, αρχι να διερεθι δια τυ 3 ένας απ' τυς παράγοντές-τυ, το 9. Εχτελόντας τι διέρεςι θάχυμε $3ab$.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Απλοπιίςτε τις ακόλυθες παραςτάςις κε πέςτε, πιές απ' τις ιδιότιτες τον πράκςεον παρυςιάζετε ανάνκι να χριςιμοπιίςετε ςτο κάθε παράδιγμα.

10. $a+b+a+b+a$·	$x+10+(12-x)+3.$
11. $5+a(b-5)+a$·	$x+(a+x).$
12. $m+(n-m)$	$5aabxabxx.$
13. $(3xy)\cdot(2z)$·	$\left(\frac{2}{3}ax\right)\cdot 3.$
14. $(x+3)\cdot 5$·	$7(x+y+z).$
15. $(2a+8b-4c):4$·	$(10a^2b):2.$
16. $(72x-18y):9$·	$(20a^2x^3):(5ax^2).$
17. $\frac{a}{4}:\frac{b}{4}$.	$\frac{15ax}{7}:\frac{5a}{7}.$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΦΤΕΡΟ.

ΣΧΕΤΙΚΙ ΑΡΙΘΜΙ ΚΕ ΠΡΑΚΣΙΣ ΠΑΝΟ Σ' ΑΦΤΥΣ.

I. Μεγέθι, πυ μπορύνε να ενοιθύνε κατα διο αντίθετες ένιες.

11. Πρόβλιμα 1. Το θερμόμετρο έδιχνε τα μεςάνιχτα 2 κε το μεςιμέρι 5°. Κατα πόςυς βαθμυς κε πός άλακςε ι θερμοκραςία απ' τα μεςάνιχτα ός το μεςιμέρι;

Στο πρόβλιμα αφτο ι όρι δεν εκφραςτίκανε με αρκετι ακρίβια. Επρεπε να ςιμιοθι ακόμα, πος το θερμόμετρο έδιχνε 2° πάνο απ' το μιδενικο ί 2° κάτο απ' το μιδενικο. Παρόμιες ιποδίκςις έπρεπε να γίνυν κε ςχετικα με τι θερμοκραςία, πυ έδιχνε το μεςιμέρι. Αν, λ. χ., μετα τα μεςάνιχτα κε το μεςιμέρι ι θερμοκραςία ίτανε πάνο απ' το μιδενικο, τότε ςτο χρονικο αφτο διάςτιμα ι θερμοκραςία ιπςόθικε απο 2°, πυ ίτανε ςε 5°, ιπςόθικε διλ. κατα 3°. Αν τυναντίον, τα μεςάνιχτα ι θερμοκραςία ίτανε 2° κάτο απ' το μιδενικο κε το μεςιμέρι 5° πάνο απ' το μιδενικο, τότε ι θερμοκραςία ιπςόθικε κατα 2 + 5, διλ. κατα 7° κ. τ. λ.

Στο πρόβλιμα αφτο κάνυμε λόγο για μέγεθος, πυ έχι κ α τ έ φ θ ι ν ς ι: βαθμυς θερμοκραςίας μπορύμε να μετρίςυμε κε πάνο απ' το μιδενικο κε κάτο απ' αφτο. Ι θερμοκραςία πάνο απ' το 0 (ζέςτι) λογαριάζετε θετικι κε παραςτένετε με τον αριθμο τον βαθμον κε το ςιμίο +, ενο ι θερμοκραςία κάτο απ' το 0° (κρίο) λογαριάζετε αρνιτικι κε παραςτένετε με τον αριθμο τον βαθμον κε το ςιμίο — (ο πρότος αριθμος μπορι χορις καμια παρεκςίγιςι να παρθι κε χορις ςιμίο).

Το πρόβλιμά-μας ίςτερα απ' αφτα, πυ ίπαμε, μπορι να διατιποθι έτςι: το θερμόμετρο έδιχνε τα μεςάνιχτα — 2° κε το μεςιμέρι + 5°. Κατα πόςυς βαθμυς άλακςε ι θερμοκραςία απ' τα μεςάνιχτα ός το μεςιμέρι; **Εχοντας τέτια μορφι το πρόβλιμα, ίνε δινατο να δοθι πια ολότελα οριςτικι απάντιςι: ι. θερμοκραςία ιπςόθικε κατα 2 + 5, διλ. κατα 7°.**

Πρόβλιμα 2. Οταν ι ταχία αμακςοστιχία τις Οχτοβριανις ςιδεροδρομικις γραμις (πυ ενόνι τι Μόςχα με το Λενινγραντ) βριςκότανε ςε απόςταςι 100 **χμ** απ' το σταθμο Μπολόγοε (ο σταθμος αφτος βρίςκετε στα μιςα τυ δρόμυ, πυ ενόνι τι Μόςχα με το Λενινγραντ), τότε το ταχιδρομίκο τρένο τις γραμις αφτις βριςκότανε ςε απόςταςι 50 **χμ** απ' τον ίδιο σταθμο. Πόςι ίτανε τότε ι απόςταςι ανάμεςα στα διο αφτα τρένα;

Το πρόβλιμα με τέτια μορφι δεν ίνε ολότελα οριζμένο. Δεν αναφέρετε τίποτε, αν τα τρένα βρίςκονταν στι μια πλεβρα τυ Μπολόγοε λ.χ. προς τιν κατέφθινςι τυ Λενινγραντ, ίτε βρίςκονταν το ένα απ' τι μια μερια τυ σταθμυ Μπολόγοε κε το άλο απ' τιν άλι. Αν ςινέβενε το πρότο, τότε τα διο τρένα θάχανε απόςταςι ανάμεςά-τυς, όπος ίνε ολοφάνερο, 100 — 50, διλ. 50 **χμ**, κι αν το δέφτερο, ι απόςταςί-τυς θάτανε τότες 100 + 50, διλ. 150 **χμ**. Επομένος, για να μιν ίνε το πρόβλιμα αόριστο, δεν πρέπι μονάχα ν' αναφερθι το μέγεθος τον αποςτάςεον απ' το σταθμο Μπολόγοε, μα ίνε ςινάμα ανάνκι να ίποδιχτι κε σε πιά κατέφθινςι απ' το σταθμο Μπολόγοε πρέπι να παρθυν ι αποςτάςις αφτες.

Κε στο παράδιγμα αφτο παρυςιάζετε ανάνκι να εκςεταςτι μαζί με τι διάσταςι τυ μεγέθυς κε ι κ α τ έ φ θ ι ν ς ι. Μια κε ι ίδια απόςταςι (λ.χ. 100 **χμ**) απ' το τρένο ός το σταθμο Μπολόγοε μπορι να παρθι στι μια κατέφθινςι (λ.χ. προς στι Μόςχα) κε στιν άλι, τιν αντίθετι με τιν πρότι (προς το Λενινγραντ).

Ι γνοςτι ς' εμας αριθμι απ' τιν αριθμιτικι, δίχνυνε μονάχα το μέγεθος τον αποςτάςεον κε δε μας λένε τίποτε για τιν κατέφθινςί-τυς.

Στο παραπάνο παράδιγμα παρυςιάζετε ανάνκι κοντα στον αριθμο, πυ δίχνι τιν απόςταςι, να ςιμιοθι κ' ι κατέφθινςι, λ. χ. 100 **χμ** προς τι Μόςχα, 50 **χμ** προς το Λενινγραντ κ. τ. λ. Μονάχα σε τέτια περίπτοςι το πρόβλιμα θάνε οριζμένο.

Ι κατεφθίνςις μπορύνε να ςιμιοθυν έτςι:

Ονομάζομε τι μια απο τις διο κατεφθίνςις τις Οχτοβριανις γραμις (λ. χ. τιν κατέφθινςι απ' το Λενινγραντ προς τι Μόςχα) θ ε τ ι κ ι κε τιν αντίθετι μ' αφτι (απ' τι Μόςχα προς το Λενινγραντ), α ρ ν ι τ ι κ ι. Τις αποςτάςις τότε προς το μέρος τις Μόςχας θα τις ονομάςυμε θ ε τ ι κ ε ς α π ο ς τ ά ς ι ς, κε τις άλες, προς το μέρος τυ Λενινγραντ, α ρ ν ι τ ι κ ε ς. Τις πρότες θα τις παραςτίςυμε με αριθμυς, με το ςιμίο + (ςιν) ίτε χορις κανένα ςιμίο, κε τις δέφτερες με αριθμυς, πϋχυνε ςιμίο — (πλιν).

Σίμφονα μ' αφτα, πυ ίπαμε, αν το τρένο βριςκότανε ςε από-

ςταςι 100 **χμ** απ' το ςταθμο Μπολόγοε προς τιν κατέφθινςι τις Μόςχας, θα λέγαμε, πος ι απόςταςί-τυ απ' το ςταθμο Μπολόγοε ίνε ίςι με + 100 **χμ** (ί απλύςτερα 100 **χμ**). Αντίθετα, αν βριςκότανε ςε απόςταςι 50 **χμ** απ' το ςταθμο Μπολόγοε προς τιν κατέφθινςι τυ Λενινγραντ, τότε θα λέγαμε, πος ι απόςταςί-τυ απ' το ςταθμο ίνε ίςι με — 50 **χμ**. Τα ςιμία + κε — ςτιν περίπτοςι αφτι δεν παραςτένυν πρόςθεςι κε αφέρεςι, μα χριςιμέβυνε μονάχα ςτι ςινθιματικι παράςταςι τον κατεφθίνςεον.

Το πρόβλιμά-μας μπορι τόρα να διατιποθι έτςι: όταν ι ταχία αμαξοςτιχία τις Οχτοβριανις ςιδεροδρομικις γραμις βριςκότανε ςε απόςταςι + 100 **χμ** απ' το ςταθμο Μπολόγοε, (ί απλύςτερα 100 **χμ**) τότε το ταχιδρομικο τρένο τις γραμις αφτις βριςκότανε ςε απόςταςι — 50 **χμ** απ' το ςταθμο Μπολόγοε. Τί απόςταςι ίχανε ςτιν περίπτοςι αφτι τα τρένα ανάμεςά-τυς; Το πρόβλιμα τόρα διατιπόθικε με μεγάλι ακρίβια, κ' ι απάντιςι, πυ θα δοθι, θάνε ολότελα οριςμένι (κίτα ςχ. 1 όπυ το βέλος δίχνι τι θετικι διέφθινςι τυ δρόμυ). Τα τρένα βριςκόντανε ςε απόςταςι 100 + 50 διλ. 150 **χμ**.

12. Αλα μεγέθι, πυ μπορύνε να ενοιθύνε κατα διο αντίθετες ένιες. Εκςον απ' τα μεγέθι, πυ αναφέραμε ςτα προιγύμενα προβλίματα, ιπάρχυνε κε πολα άλα, πυ μπορύνε να ενοιθυν κε με αντίθετι ένια. Τέτια ίνε λ. χ:

τα έςοδα	κε το	αντίθετο	μ' αφτα	έκςοδα
το κέρδος	,, ,,	,,	μ' αφτο	ζιμία
ι περιυςία	,, ,,	,,	,, ,,	χρέος
κ. τ. λ.				

Αν ςιμφονίςυμε τα έςοδα, το κέρδος, τιν περιυςία . . . να τα παραδεχτύμε ος θετικα μεγέθι κε να τα παραςτίςυμε με αριθμυς, πυ



Σχ. 1.

έχυνε μπροςτα το ςιμίο + (ί κε κανένα ςιμίο), τότε τα έκςοδα, τι ζιμία, το χρέος . . . πρέπι να τα παραδεχτύμε ος μεγέθι τυ ίδιυ γένυς, αρνιτικα όμος, κε να τα παραςτίςυμε με αριθμυς, πυ έχυν το ςιμίο —. Σε παρόμια περίπτοςι λέμε, πος τα έκςοδα ίνε αρνιτικα έςοδα, ι ζιμία αρνιτικο κέρδος κ.τ.λ. Ιςτερα απο τέτια

ςιμφονία, θα γίνυνε καταλιπτες ι παρακάτο εκφράςις. Ενα ζακτ ίχε έςοδα απο κατιχίες: το Γενάρι + 200 ρύβλ., το Φλεβάρι + 150 ρύβλια χε το Μάρτι — 50 ρύβλ. (διλαδι το Μάρτι ίχε ζιμία 50 ρύβλια), ίτε ι παρακάτο: ο μεγαλίτερος αδερφος ίχε περιυςία 500 ρύβλ., ο δέφτερος 300 ρύβλ. κι ο μικρότερος — 500 ρύβλ. (διλαδι ο μικρότερος αδερφος ίχε χρέος 500 ρύβλ.).

Πρέπι όμος να ςιμιοθι, πος εκςον απ' τα μεγέθι, πυ αναφέραμε, ιπάρχυνε κε πολα άλα, πυ δε μπορύμε να διακρίνυμε τις «κατεφθίνςις». Τέτια λ. χ. μεγέθι, όπος ο όνκος, το εμβαδο κε πολα άλα δεν μπορύνε να ενοιθύνε κατα δίο αντίθετες ένιες.

13. Σχετικι αριθμι. Ι αριθμι, πυ μεταχιριζόμαςτε ςτιν αριθμιτικι, χριςιμέβυνε για τιν παράςταςι τέτιον μεγεθον, πυ ι κατέφθινςί-τυς δεν πέρνετε ιπόψι (λ.χ. όταν θέλυνε να βρυν τι διάςταςι μιας κάπιας απόςταςις κι όχι τιν κατέφθινςι, προς το μέρος τις οπίας πέρνετε), ενο ι αριθμι, πυ μεταχιριζόμαςτε ςτιν άλγεβρα, χριςιμέβυνε για τιν παράςταςι τις διάςταςις τον μεγεθον κε τον κατεφθίςεόν-τυς. Για το λόγο αφτο, το ένα απ' τα μεγέθι αφτα, πυ δίχνυνε κάπια κατέφθινςι, το παραςτένυνε με αριθμο, πυ έχι μπροςτα το ςιμίο + κε το άλο, το αντίθετο μ' αφτο, με αριθμο, πυ έχι μπροςτα το ςιμίο —.

Ο αριθμος, πυ έχι μπροςτα το ςιμίο + (πυ μπορι κε να παραλίπετε), ονομάζετε θ ε τ ι κ ο ς κι ο αριθμος, πυ έχι το ςιμίο —, ονομάζετε α ρ ν ι τ ι κ ο ς. Θετικι λ.χ. ίνε ι αριθμι + 10, + $+\frac{1}{2}$, + 0,3 κε αρνιτικι ι αριθμι — 8, $-\frac{5}{7}$, — 3,25. Στυς αριθμυς ιπάγετε κε το 0 (μιδενικο), πυ δε ςινκαταλέγετε ύτε με τυς θετικυς ύτε με τυς αρνιτικυς αριθμυς. Ι παραςτάςις + 0, — 0 ί μόνο 0 ίνε ιςοδίναμες.

Ι θετικι κ' ι αρνιτικι αριθμι καθος κε το μιδενικο ονομάζυντε ς χ ε τ ι κ ι ί α λ γ ε β ρ ι κ ι α ρ ι θ μ ι προς διάκριςι απ' τυς ςινιθιζμένυς αριθμυς (αριθμιτικυς), πυ δεν έχυνε μπροςτά-τυς κανένα ςιμίο.

Α π ό λ ι τ ο α ρ ι θ μ ο ί **ά π ό λ ι τ ι τ ι μ ι** ενος ςχετικυ αριθμυ, ονομάζυμε αφτον τον ίδιο αριθμο χορις ςιμίο. Ι απόλιτι λ.χ. τιμι τυ — 10 ίνε το 10, ι απόλιτι τιμι τυ αριθμυ + 5 ίνε το 5.

Διο ςχετικι αριθμι θεορύντε ί ς ι, αν ίνε ίςες ι απόλιτές-τυς τιμες κ' έχυν τα ίδια ςιμία.

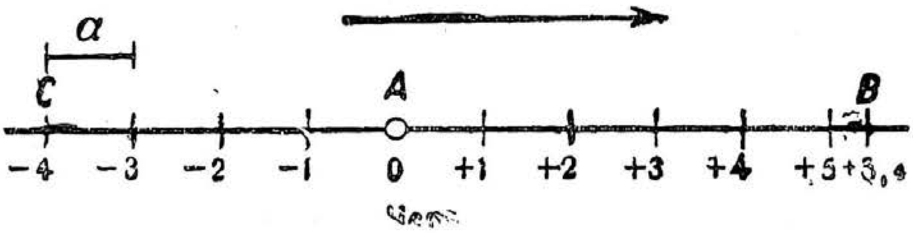
14. Παράςταςι τον αριθμον πάνο ςτον αριθμιτικο άκςονα. Τμίμα εφθίας ίτε απλα εφθία (ςχ. 2) ονομάζετε

μέρος μιας οπιαςδίποτε εφθίας γραμις, πυ περιορίζετε κι απ' τα διό-τις μέρι, λ.χ. απ' το ένα-τις μέρος απ' το ςιμίο A κι απ' το άλο-τις μέρος απ' το ςιμίο B. Σε κάθε τμίμα εφθίας διακρίνυμε: πρότο, το μάκρος-τις, δέφτερο, τιν κατέφθινςι, πυ μπορι νάνε για το δομένο τμίμα τις εφθίας διπλι. Στο τμίμα λ.χ. τις εφθίας, πυ πίραμε, ι κατέφθινςι μπορι να λογαριαςτι απ' το ςιμίο A προς το ςιμίο B, ί, αντίθετα, απ' το B προς το A. Αν εκςετάςυμε το δομένο τμίμα τις εφθίας προς τι μια απ' τις κατεφθίνςις, λ.χ. απ' το A προς το B, τότε το A θα το ονομάςυμε αρχι κε το B, τέλος τυ τμίματος τις εφθίας.



Σχ. 2.

Με τι βοίθια τέτιον εφθιον μπορύμε να παραςτίςυμε εποπτικα τυς ςχετικυς αριθμυς με τον ακόλυθο τρόπο. Πέρνυμε μια οπιαδίποτε εφθία (λ.χ. οριζόντια) κι ορίζυμε πιά απ' τις διο κατεφθίνςις τις εφθίας αφτις θα λογαριάςυμε θετικι (ςχ. 3). Αν, λ. χ., πάρυμε ος θετικι τι κατέφθινςι απ' τα αριςτερα προς τα δεκςια (όπος δίχνι το βέλος), τότε τιν αντίθετι μ' αφτι κατέφθινςι — απ'



Σχ. 3.

τα δεκςια προς τ' αριςτερα — θα τι θεορίςυμε ος αρνιτικι. Επιτα πέρνυμε ένα οπιοδίποτε μάκρος a (πυ παραςτένετε ςτο ςχίμα) ος μονάδα μάκρυς. Ας ιποθέςυμε τόρα, πος μας δόθικε ένας κάπιος θετικος αριθμος, λ.χ., $+5{,}4$. Πέρνυμε πάνο ςτιν εφθία-μας ένα κάπιο ςιμίο A κε το λογαριάζυμε ος αρχι τυ τμίματος τις εφθίας. Χορίζυμε ίςτερα πάνο ςτιν εφθία δεκςια απ' το ςιμίο αφτο 5,4 μονάδες μάκρυς, ίςες με το a. Θάχυμε τότε το τμίμα τις εφθίας AB, πυ θάχι μάκρος ίςο με 5,4 μονάδες μάκρυς κε κατέφθινςι θετικι. Ι άκρι B τυ τμίματος αφτυ θα μας παραςτίςι εποπτικα τον αριθμο $+\ 5{,}4$. Ας πάρυμε τόρα έναν αρνιτικο αριθμο, λ.χ., το -4. Για να παραςτίςυμε τον αριθμο αφτον εποπτικα, χορίζυμε πάνο ςτιν εφθία, αριςτερα απ' το ςιμίο A, 4 μονάδες μάκρυς. Θά-

χυμε τότε το τμίμα τις εφθίας AC, πυ θἄχι μάκρος ίσο με 4 μονάδες μάκρυς κε κατέφθινςι αρνιτικι. Ι άκρι τυ C τυ τμίματος αφτυ θα παραςτένι τον αριθμο — 4.

Ολυς τυς ςχετικυς αριθμυς μπορύμε να τυς φανταςτύμε ος άκρες τμιμάτον εφθιον με οριζμένι κατέφθινςι, πυ χοριςτίκανε πάνο ςε μια κε τιν ίδια εφθία απὄνα κε το ίδιο ςιμίο A, πυ πάρθικε ος α ρ χ ι τον τμιμάτον τον εφθιον. Σε παρόμια περίπτοςι πάνο ςτο τμίμα τις εφθίας, πυ βρίςκετε δεχςια απ' το A, παραςτένοντε με ςιμία χάμποςι θετικι αριθμι, κε πάνο ςτο μέρος τις εφθίας, πυ βρίςκετε αριςτερα απ' το A, παραςτένυντε ι αρνιτικι αριθμι. Το μιδενικο πάνο ςτιν εφθία αφτι παραςτένετε με το ςιμίο A. Παρόμια εφθία ονομάζετε ςινίθος ε φ θ ί α τ ο ν α ρ ι θ μ ο ν, ί α ρ ι θ μ ι τ ι κ ο ς ά κ ς ο ν α ς.

Επιδι ι κατέφθινςι τον τμιμάτον τον εφθιον, ι άκρες τον οπίον παραςτένυν αριθμυς με το ςιμίο +, ίνε αντίθετι με τιν κατέφθινςι τον τμιμάτον τον εφθιον, πυ παραςτένυν αριθμυς με το ςιμίο —, γι' αφτο τα ςιμία «+» κε «—» ονομαςτίκανε κι αφτα α ν τ ί θ ε τ α ςιμία. Όλι ι αριθμι, όπος + 3 κε — 3, $+\frac{1}{2}$ κε $-\frac{1}{2}$ κ.τ.λ. πυ έχυν αντίθετα ςιμία, μα ίςες απόλιτες τιμες, ονομάζυντε α ν τ ί θ ε τ ι α ρ ι θ μ ι.

Τόρα ας εκςετάςυμε, πός γίνυντε ι διάφορες πράκςις με τυς ς χ ε τ ι κ υ ς α ρ ι θ μ υ ς.

II. Πρόςθεςι ςχετικον αριθμον.

15. Πρόβλιμα. Μια κοπερατίβα κέρδιςε το Γενάρι a ρύβλ. κε το Φλεβάρι b ρύβλ. Πόςο κέρδιςε το όλο ςτυς διο μίνες;

Ας γράπςυμε τίπο για τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ. Ινε φανερο, πος το κέρδος ςτο διάςτιμα τον διο μινον θἄνε ίςο με το άθριζμα τον κερδον, πυ ίχε ι κοπερατίβα κάθε μίνα. Παραςτένοντας το ζιτύμενο άθριζμα με το x, θἄχυμε τον τίπο:

$$x = a + b.$$

Ι κοπερατίβα όμος μπορύςε τον ένα απ' τυς μίνες αφτυς ί κε τυς διο να ίχε ζιμία. Για νἄνε δινατο να χριςιμοπιιθι ο τίπος-μας κε ςε τέτιες περιπτόςις, ίνε ανάνκι τα γράματα a κε b νἄνε ςχετικι αριθμι, διλ. θετικι ίτε αρνιτικι. Το ίδος τον αριθμον θα εκςαρτιθι απ' το κέρδος ί τι ζιμία, πυ ίχε ςε καθένα απ' τυς μίνες αφτυς. Για το λόγο αφτο, ίνε ανάνκι να μάθυμε να προςθέτυμε τυς ςχετικυς αριθμυς.

16. Πρόςθεςι δίο αριθμον. Θα εκςετάςυμε στιν αρχι διο μερικες περιπτόςις τις πρόςθεςις τον ςχετικον αριθμον.

α) **Το άθριζμα διο αντίθετον αριθμον ίνε ίςο με το μιδενικο.** Ετςι:

$$(+5)+(-5)=0,\quad (-3)+(+3)=0,\quad (+4{,}7)+(-4{,}7)=0.$$

Γενικα:

$$(+a)+(-a)=0.$$

Κε πραγματικα, αν ι κοπερατίβα ίχε τον ένα μίνα κέρδος κε τον άλο μίνα ζιμία ίςι με το κέρδος αφτο, δε θάχε στο τέλος ύτε κέρδος, ύτε ζιμία.

Για τον ίδιο ακριβος λόγο, αν ένα τρένο απομακρινότανε απ' το ςταθμο ςε μια οπιαδίποτε κατέφθινςι 5 **χμ** κ' ίςτερα διάτρεχε ςτιν αντίθετι κατέφθινςι 5 πάλι **χμ**, δε θ' απομακρινότανε καθόλο απ' το ςταθμο.

β) **Προςθέτοντας ς' ένα οπιονδίποτε αριθμο μιδενικο ί προςθέτοντας ςτο μιδενικο ένα οπιονδίποτε αριθμο, ίνε το ίδιο ςα ν' αφίςυμε τον αριθμο αφτο χορις καμια αλαγι.** Ετςι:

$$(+75)+0=+75,\qquad (-75)+0=-75,$$
$$0+(+3{,}5)=+3{,}5,\qquad 0+(-3{,}5)=-3{,}5.$$

Γενικα:

$$(+a)+0=+a,\quad (-a)+0=-a.$$

Κε πραγματικα, αν ι κοπερατίβα ίχε τον πρότο μίνα κέρδος ί ζιμία 75 ρύβλ. κε τον άλο μίνα ύτε κέρδος, ύτε ζιμία, τότε το κέρδος ί ι ζιμία τυ πρότυ μίνα θάμενε χορις καμια αλαγι.

Ας κςαναγιρίςυμε τόρα στο πρόβλιμα τυ 15 παράγραφυ. Ο γενικος τίπος για τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ ίνε ο ακόλυθος:

$$x=a+b.$$

Ας εκςετάςυμε τις διάφορες περιπτόςις, πυ θα τίχυμε τι στιγμι πυ θ' αντικαταςτίςυμε τα γράματα a κε b με δομένυς αριθμυς.

1-ι περίπτοςι. Ι κοπερατίβα ίχε κέρδος κε τυς διο μίνες. Κέρδιςε λ. χ. τον πρότο μίνα 200 ρύβλ. κε το δέφτερο 150.

Στιν περίπτοςι αφτι θάχυμε: $a=+200,\qquad b=+150.$

Ινε φανερο, πος θάνε:

$$x = (+200) + (+150) = +350,$$

κέρδιςε διλ. ι κοπερατίβα στυς διο μίνες 350 ρύβλια.

2-ι περίπτοςι. Ι κοπερατίβα ίχε κε τυς διο μίνες ζιμία. Ζιμίοςε λ. χ. τον πρότο μίνα 200 ρύβλ. κε το δέφτερο 150.

Στιν περίπτοςι αφτι θάχυμε: $a = -200$, $b = -150$. Ινε φανερο, πος θάνε:

$$x = (-200) + (-150) = -350,$$

ζιμίοςε διλ. ι κοπερατίβα στυς διό μίνες 350 ρύβλια.

Απ' τα παραπάνο παραδίγματα μπορύμε να βγάλυμε τ' ακόλυθο ςιμπέραζμα:

Για να προςθέςυμε διο αριθμυς, πυ έχυνε το ίδιο ςιμίο, προςθέτυμε τις απόλιτές-τυ τιμες κε ςτο άθριζμα βάζυμε το κινο ςιμίο τον προςθετέον.

3-ι περίπτοςι. Τον ένα μίνα ι κοπερατίβα ίχε κέρδος κε τον άλο ζιμία. Το κέρδος, πυ ίχε ι κοπερατίβα ίτανε περιςότερο απο τι ζιμία. Κέρδιςε λ. χ. τον πρότο μίνα 200 ρύβλ. κε ζιμίοςε τον δέφτερο 150 ρύβλ.

Στιν περίπτοςι αφτι θάχυμε: $a = +200$, $b = -150$. Ινε φανερο, πος ι κοπερατίβα κέρδιςε το όλο 50 ρύβλ., διλ.

$$x = (+200) + (-150) = +50.$$

4-ι περίπτοςι. Τον ένα μίνα ι κοπερατίβα ίχε κέρδος κε τον άλο ζιμία. Το κέρδος ςτιν περίπτοςι αφτι ίτανε λιγότερο απο τι ζιμία. Π. χ. τον πρότο μίνα ίχε 200 ρ. ζιμία κε το δέφτερο 150 ρ. κέρδος

Θάχυμε: $a = -200$, $b = +150$. Ινε φανερο, πος ι κοπερατίβα ζιμίοςε τόρα 50 ρύβλ., διλ:

$$x = (-200) + (+150) = -50.$$

Απ' τα διο τελεφτέα παραδίγματα μπορύμε να βγάλυμε το ακόλυθο ςιμπέραζμα:

Για να προςθέςυμε διο αριθμυς, πυ έχυνε διάφορα ςιμία, αφερύμε τι μικρότερι απ' τις απόλιτες τιμες απ' τι μεγαλίτερι κε ςτι διαφορα βάζυμε το ςιμίο τυ αριθμυ, πυ έχι τι μεγαλίτερι απόλιτι τιμι.

Χάνοντας το ςιμίο + απ' το θετικο αριθμο, μπορύμε τις παραπάνο ιςότιτες να τις γράπςυμε ςιντομότερα:

$$200+(-150)=50, \quad -200+150=-50.$$

17. Διατίποςι τον κανόνον τις πρόςθεςις μ' άλον τρόπο. Ι διο κανόνες τις πρόςθεςις, πυ αναφέραμε, μπορύνε να διατιποθύνε με διο άλυς κανόνες πιο κατάλιλυς:

α) **Λέγοντας να προςτεθι θετικος αριθμος, ενούμε πος θα προςτεθι ι απόλιτί-τυ τιμι.** Ετςι:

$$(+7)+(+3)=+10 \text{ κε } (+7)+3=7+3=10,$$
$$(-7)+(+3)=-4 \text{ κε } (-7)+3=-7+3=-4.$$

β) **Λέγοντας να προςτεθι αρνιτικος αριθμος, ενούμε πος θα αφερεθι ι απόλιτί-τυ τιμι.** Ετςι:

$$(+7)+(-10)=-3 \text{ κε } (+7)-10=7-10=-3,$$
$$(-7)+(-10)=-17 \text{ κε } (-7)-10=-7-10=-17.$$

Τυς παραπάνο διο κανόνες μπορύμε να τυς παραςτίςυμε πιο ςίντομα με τυς δ ι ο α κ ό λ υ θ υ ς τ ί π υ ς:

$$+(+a)=+a, \quad +(-a)=-a.$$

18. Πρόςθεςι τριον κε περιςότερον αριθμον. Για να προςθέςυμε τρις κε παραπάνο προςθετέυς, βρίςκυμε πρότα-πρότα το άθριζμα τον διο προςθετέαν, ίςτερα προςθέτυμε με το άθριζμα αφτο τον τρίτο κ. τ. λ. Ας ιποθέςυμε, λόγυ χάριν, ότι θέλυμε να βρύμε το άθριζμα:

$$(+8)+(-5)+(-4)+(+3),$$

πυ μπορι ςιντομότερα να γραφι έτςι:

$$8+(-5)+(-4)+3.$$

Ι πρόςθεςι τυ παραπάνο αθρίζματος γίνετε με τιν ακόλυθι ςιρα:

$$8+(-5)=3, \quad 3+(-4)=-1, \quad (-1)+3=2.$$

Αλοςτε δεν ίνε ανάνκι να φιλάκςυμε πάντα τέτια ςιρα, γιατι (όπος γρίγορα θα ιδύμε ςτον § 25) τυς προςθετέυς μπορύμε να τυς μεταθέςυμε κε να τυς ενόςυμε ςε οπιεςδίποτε ομάδες.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

18. $(+7)+(+3)$, $(-7)+(-3)$, $\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(2\frac{1}{2}\right)$.

19. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$, $(+10)+(-2)$, $(+10)+(-12)$.

20. $(-5)+(+5)$, $(-5)+(+2)$, $4+(-3)$.

21. $(-4)+3$, $8+(-10)$, $(-8)+10$.

22. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$.

23. $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$.

III. Αφέρεςι ςχετικον αριθμον.

19. Πρόβλιμα. Μια φάμπριχα ίχε κέρδος ςε διο μίνες, το Γενάρι χε το Φλεβάρι, *a* ρύβλια. Τί κέρδος ίχε ι φάμπριχα το Φλεβάρι, αν ίνε γνοςτο, πος ςτο Γενάρι το κέρδος τις φάμπριχας ίτανε *b* ρύβλια;

Το κέρδος διο μινον ίνε βέβεα το άθριζμα τον κερδον, πυ ίχε ι φάμπριχα χςεχοριςτα τον κάθε μίνα κε μάλιςτα το κέρδος μπορι να παραςταθι κάποτε με θετικο αριθμο κε κάποτε με αρνιτικο, (ζιμία).

Για το λόγο αφτο το ζιτύμενο κέρδος τυ Φλεβάρι πρέπι νἄνε τέτιος θετικος ί αρνιτικος αριθμος, πυ όταν τον προςθέτυμε ςίμφονα με τυς κανόνες τις πρόςθεςις τον ςχετικον αριθμον μαζι με το κέρδος τυ Γενάρι να δόςι ος άθριζμα το κέρδος τον διο μινον. Στο πρόβλιμά-μας λιπον δίνετε το άθριζμα *a* κι ο ένας απ' τυς προςθετέυς *b* κε ζιτύμε να βρύμε τον άλο προςθετέο.

Ι π ρ ά χ ς ι, μ έ ς ο τ ι ς ο π ί α ς, χ ς έ ρ ο ν τ α ς τ ο ά θ ρ ι ζ μ α δ ι ο α ρ ι θ μ ο ν χ ε τ ο ν έ ν α α π' α φ τ υ ς β ρ ί ς κ υ μ ε τ ο ν ά λ ο π ρ ο ς θ ε τ έ ο, ο ν ο μ ά ζ ε τ ε α φ έ ρ ε ς ι, αδιάφορο αν ι αριθμι, πυ δίνυντε, ίνε αριθμιτικι ί ςχετικι. Σε τέτια περίπτοςι το δομένο άθριζμα ονομάζετε μ ι ο τ έ ο ς, ο δομένος προςθετέος — α φ ε ρ ε τ έ ο ς κε ο ζιτύμενος αριθμος δ ι α φ ο ρ α (ί ι π ό λ ι π ο). Απ' τα παραπάνο φένετε, πος τι δοκιμι τις αφέρεςις μπορύμε να τιν κάνυμε με τιν πρόςθεςι: βρίςκοντας διλ. τι ζιτύμενι διαφορα τιν προςθέτυμε με τον αφερετέο, κι αν δύμε, πος το άθριζμα, πυ θα προκίπςι θἄνε ίςο με το μιοτέο, τότε ι αφέρεςίμας θἄνε ςοςτι.

20. Εβρεςι διαφορας, πυ να ίνε ένας απ' τυς προςθετέυς. Παραςτένοντας ςτο πρόβλιμά-μας τι ζιτύμενι διαφορα με το x, μπορύμε να γράπςυμε:

$$x = a - b.$$

Ας βρύμε τόρα το μέγεθος τις διαφορας $a - b$ ςτις ακόλυθες μερικες περιπτόςις:

α) Ας ιποθέςυμε, πος ίνε: $a = +1000$, $b = +400$. Αφτο ςιμένι, πος ι φάμπρικά-μας ςτο Γενάρι έδοκε κέρδος 400 ρύβλ. κε ςτο διάςτιμα τον διο μινον έδοκε το όλο 1000 ρύβλ. κέρδος. Οςτε το Φλεβάρι έδοκε κέρδος 600 ρυβλ. Θἄχυμε λιπον:

$$x = (+1000) - (+400) = +600,$$

ί πιο απλα:

$$x = 1000 - 400 = + 600.$$

Κάνυμε τι δοκιμι με τιν πρόςθεςι:

$$(+ 600) + (+ 400) = + 1000.$$

β) Ας ιποθέςυμε, ότι: $a = + 1000$ κε $b = + 1000$. Αφτο ςιμένι, ότι ι φάμπρικα το Γενάρι έδοκε κέρδος 1000 ρύβλια κε ςτο διάςτιμα τον διο μινον το κέρδος έμινε το ίδιο. Ινε φανερο, πος το Φλεβάρι ι φάμπρικα δεν έδοςε ύτε κέρδος ύτε ζιμία. Επομένος:

$$x = (+ 1000) - (+ 1000) = 0.$$

Ας κάνυμε τι δοκιμι με τιν πρόςθεςι:

$$(+ 1000) + 0 = + 1000.$$

Ι αφέρεςι ίνε ςοςτι. Με παρόμιυς ςιλογιζμυς βρίςκυμε, ότι:

$$(- 1000) - (- 1000) = 0.$$

γ) $a = + 1000$, $b = + 1200$. Αφτο ςιμένι, ότι το Γενάρι ι φάμπρικα έδοκε κέρδος 1200 ρύβλ., κε ςτο διάςτιμα τον διο μινον το κέρδος γένικε 1000 ρύβλ. Ινε φανερο, πος ένα μέρος απ' τα κέρδι τυ Γενάρι, τα 200 ρύβλ., χριαςτίκανε να ςκεπάςυν τι ζιμία, πυ γένικε το Φλεβάρι., Επομένος:

$$x = (+ 1000) - (+ 1200) = - 200,$$

ί πιο απλα:

$$x = 1000 - 1200 = - 200.$$

Ας κάνυμε τι δοκιμι με τιν πρόςθεςι:

$$(- 200) + (+ 1200) = + 1000.$$

δ) $a = + 1000$, $b = - 200$. Αφτο ςιμένι, ότι το Γενάρι ι φάμπρικα ζιμίοςε 200 ρύβλ., κε μέςα ςτυς διο μίνες κέρδιςε το όλο 1000 ρύβλ. Ινε φανερο, πος το κέρδος αφτό δόθικε το Φλεβάρι κε ένα μέρος τυ χριάςτικε να ςκεπάςι ζιμία 200 ρυβλ., πυ γένικε το Γενάρι. Αν έλιπε ι ζιμία αφτι, το κέρδος θάτανε 1200 ρύβλ. Επομένος:

$$x = (+ 1000) - (- 200) = + 1200,$$

ίτε

$$x = 1000 - (- 200) = 1200.$$

Κάνυμε τι δοκιμι με τιν πρόςθεςι:

$$(+ 1200) + (- 200) = + 1000.$$

ε) $a = -100$, $b = +800$. Αφτο ςιμένι, ότι το Γενάρι ι φάμπριχα έδοχε χέρδος 800 ρύβλ., μα στο διάςτιμα τον διο μινον αφίχε ζιμία 100 ρύβλ. Ινε φανερο, πος ο Φλεβάρις έδοσε ζιμία, πυ ίνε ι ετία, όχι μονάχα να χαθυν τα 800 ρύβλια, όλο το χέρδος τυ Γενάρι, αλα χε να μίνι ζιμία 100 ρύβλ., διλ. όλι ι ζιμία, τυ Φλεβάρι, ίνε ίςι με 900 ρύβλ. Επομένως:

$$x = (-100) - (+800) = -900,$$

ίτε

$$x = -100 - 800 = -900.$$

Ας χάνυμε τι δοχιμι με τιν πρόςθεςι:

$$(-900) + (+800) = -100.$$

ζ) $a = -100$, $b = -150$. Διλαδι, το Γενάρι γένιχε ζιμία 150 ρύβλ., ςινολιχα όμος στο διάςτιμα τον διο μινον γένιχε 100 ρύβλ. ζιμία. Οςτε ένα μέρος τις ζιμίας, τυ Γενάρι, τα 50 ρύβλ., ςχεπάςθιχαν με ίςο ποςο απ' το χέρδος τυ Φλεβάρι. Εχυμε λιπον:

$$x = (-100) - (-150) = +50.$$

Ας χάνυμε τι δοχιμι με τιν πρόςθεςι:

$$50 + (-150) = -100.$$

21. Κανόνας τις αφέρεςις. Εχςετάζοντας τα παραδίγματα, πυ αναφέραμε στιν προιγύμενι παράγραφο, παρατιρύμε, πος σε χάθε μια απ' τις περιπτόςις αφτες, ίτανε δινατο ι αφέρεςι τυ δομένυ αριθμυ ν' αντιχαταςταθι με πρόςθεςι τυ αντίθετυ μ' αφτον αριθμυ.

Ας πάρυμε λ. χ., τιν περίπτοςι α):

$$(+1000) - (+400) = +600.$$

Αντι ν' αφερέςυμε τον αριθμο $+400$ προςθέτυμε τον αντίθετό-τυ:

$$(+1000) + (-400) = +600.$$

Το εχςαγόμενο, όπος βλέπετε, θάνε το ίδιο.

Ας πάρυμε τιν περίπτοςι δ):

$$(+1000) - (-200) = +1200.$$

Αντιχαταςτένυμε τιν αφέρεςι με τιν πρόςθεςι τυ αντίθετυ αριθμυ:

$$(+1000) + (+200) = +1200.$$

Το εκςαγόμενο μένι πάλι το ίδιο.

Ας πάρυμε, τέλος, κε τιν περίπτοςι ε):

$$(-100)-(+800)=-900.$$

Κάνοντας τιν ίδια εργαςία, πυ γένικε κε νορίτερα θάχυμε:

$$(-100)+(-800)=-900.$$

Το ίδιο πράμα θα φανι, πος ίνε ςοςτο κε για όλες τις άλες περιπτόςις.

Σ' όλες λιπον τις περιπτόςις μπορύμε, αντις ν' αφερέςυμε το δομένο αριθμο, να προςθέςυμε ςτο μιοτέο αριθμο, αντίθετο με τον αφερετέο. Μ' άλα λόγια, τιν αφέρεςι μπορύμε να τιν αντικαταςτίςυμε με τιν πρόςθεςι, ι εχτέλεςι τις οπίας μας ίνε πια γνοςτι. Απ' τα παραπάνο βγάζυμε τον κανόνα:

Για ν' αφερέςυμε απο ένα αριθμο έναν οπιοδίποτε άλον, προςθέτυμε ςτο μιοτέο αριθμο αντίθετο με τον αφερετέο.

22. Τίπι διπλον ςιμίον. Σίμφονα με τον προιγύμενο κανόνα, ι αφέρεςι τυ θετικυ αριθμυ $+a$ μπορι ν' αντικαταςταθι με πρόςθεςι τυ αρνιτικυ αριθμυ $-a$, κ' ι αφέρεςι τυ αρνιτικυ αριθμυ $-a$ μπορι ν' αντικαταςταθι με πρόςθεςι τυ θετικυ αριθμυ $+a$. Αφτο μπορι να παραςτιθι με τυς τίπυς τον διπλον ςιμίον.

$$-(+a)=-a \quad -(-a)=+a.$$

23. Αλγεβρικο άθριζμα κε διαφορα. Ι ςχετικι αριθμι μας επιτρέπυνε κάθε διαφορα να τιν παραςτίςυμε με μορφι αθρίζματος κε αντίθετα, κάθε άθριζμα με μορφι διαφορας. Ι διαφορα λ.χ. $7-3$ μπορι να γραφι έτςι: $(+7)+(-3)$, ί πιο απλα: $7+(-3)$. Το άθριζμα $4+2$ μπορι να παραςτιθι έτςι: $(+4)-(-2)$, ί απλύςτερα $4-(-2)$.

Με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο κε κάθε παράςταςι, πυ φανερόνι ςιρα διαδοχικον προςθέςεον κι αφερέςεον, μπορι να παραςταθι με μορφι αθρίζματος. Παραδίγματος χάρι:

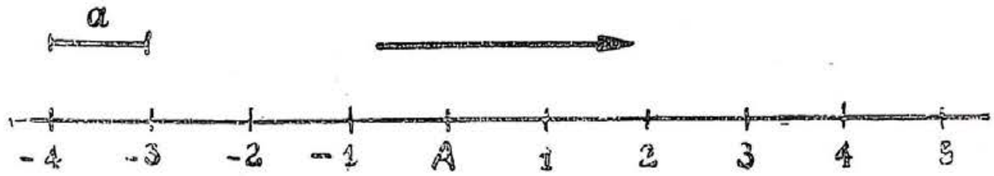
$$20-5+3-7=20+(-5)+3+(-7).$$

Για το λόγο αφτο ςτιν άλγεβρα όλες ι περιπτόςις τις πρόςθεςις κι αφέρεςις τον ςχετικον αριθμον μπορύνε να ενοθύνε ςε μια πράκςι, πυ ονομάζετε αλγεβρικι πρόςθεςι.

Το άθριζμα, πυ ι προςθετέι-τυ ίνε αριθμι θετικι, αρνιτικι, ί ίςι με το μιδενικο, ονομάζετε αλγεβρικο άθριζμα, προς διάκριςι απ' το αριθμιτικο άθριζμα, πυ ι προςθετέι-τυ ίνε αριθμι

ςινιθιζμένι (αριθμιτικι). Για τον ίδιο πάλι λόγο ι διαφορα ονομάζετε αλγεβρικι, αν ο μιοτέος κι ο αφερετέος ίνε ςχετικι αριθμι.

24. Σίνκριςι τον ςχετικον αριθμον ος προς το μέγεθος. Οταν λέμε, πος το 10 ίνε μεγαλίτερο απ' το 7, ενούμε, πος ι διαφορα 10 — 7 ίνε θετικος αριθμος, ενο ι διαφορα 7 — 10 ίνε αρνιτικος αριθμος. Ας ςιμφονίςυμε να επεχτίνυμε τιν ένια αφτι για το μεγαλίτερο κε το μικρότερο ςτυς ςχετικυς αριθμυς· τότε θα λογαριάςυμε, ότι ο **ςχετικος αριθμος** a **ίνε μεγαλίτερος απο ένα άλο ςχετικο αριθμο** b **ςτιν περίπτοςι, πυ ι διαφορα** $a - b$ **ίνε αριθμος θετικος κε το** a **μικρότερο απ' το** b **ςτιν περίπτοςι, πυ ι διαφορα** $a - b$ **ίνε αρνιτικος αριθμος.** Εχοντας ιπόψι τιν παραπάνο ςιμφονία πρέπι να παραδεχτύμε τ' ακόλυθα:



Σχ. 4.

1. Κάθε θετικος αριθμος ίνε μεγαλίτερος απ' το μιδενικο κε μεγαλίτερος απο κάθε αρνιτικο αριθμο. Λ. χ. $8 > 0$ κε $8 > -10$, επιδι ι διαφορα $8 - 0$ κε $8 - (-10)$ ίνε κε ςτις διο περιπτόςις θετικος αριθμος.

2. Κάθε αρνιτικος αριθμος ίνε μικρότερος απ' το μιδενικο κε μικρότερος απο κάθε θετικο αριθμο. Λ. χ. $-5 < 0$ κε $-5 < +2$, επιδι ι διαφορα $-5 - 0$ κε $-5 - (+2)$ ίνε κε ςτις διο περιπτόςις αρνιτικος αριθμος.

3. Απο διο αρνιτικυς αριθμυς μεγαλίτερος ίνε εκίνος, πυ έχι τι μικρότερι απόλιτι τιμι. Λ. χ. $-5 > -12$, επιδι ι διαφορα $-5 - (-12)$ ίνε ίςι με το θετικο αριθμο $+7$

Για να ςινκρίνυμε καλίτερα τα μεγέθι τον αλγεβρικον αριθμον, καταφέβνυμε ςτιν εποπτικί-τυς παράςταςι πάνο ςτιν εφθία τον αριθμον (αριθμιτικο άκςονα). Πέρνοντας μια οπιαδίποτε εφθία a ος μονάδα μάκρυς (ςχ. 4), ας φανταςτύμε, πος πάνο ςε μια απεριόριςτι εφθία δεκςια απο ένα οπιοδίποτε ςιμίο-τις A, πυ λογαριάζετε ος αρχι, χοριςτίκανε τμίματα εφθίας, πυ παραςτένυν τυς θετικυς αριθμυς $+1, +2, +3, +4 \ldots$, κι αριςτερα απ' το ίδιο ςιμίο χοριςτίκανε τμίματα εφθίας, πυ παραςτένυν τυς αρνιτικυς αριθμυς

— 1, — 2, — 3, — 4... Σε παρόμια περίπτοσι κινύμενι κατα μάκρος τις εφθίας αφτις, απ' αριςτερα προς τα δεξια, (όπος δίχνι το βέλος ςτο ςχίμα) θα πάμε ολοένα απ' τυς μικρότερυς αριθμυς ςτυς μεγαλίτερυς κε κινύμενι ςε αντίθετι κατέφθινςι, απ' τα δεξια προς τ' αριςτερα, θα πάμε ολοένα απ' τυς μεγαλίτερυς αριθμυς ςτυς μικρότερυς. Μ' άλα λόγια, απο διο οπιοςδίποτε αριθμυς μεγαλίτερος ίνε κίνος, πυ βρίςκετε πιο δεξια πάνο ςτον αριθμιτικο άξονα. Ι αλίθια τον τριον παραπάνο θέςεον για τι ςχετικι τιμι τον ςχετικον αριθμον ίνε πολι έφκολο να ελενχθι με τι βοίθια τυ άξονα αφτυ.

Σ ι μ ί ο ς ι. Αν θέλυνε να παραςτίςυνε ςίντομα, πος το a ίνε θετικος αριθμος, τότε γράφυν: $a > 0$· αν τυναντίον, θέλυνε να δίξυνε, πος το a ίνε αρνιτικος αριθμος, τότε γράφυν: $a < 0$.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

24. Ενα εμπόρεβμα αγοράςτικε για a ρύβλια κε πυλίθικε για b ρύβλια. Πόςο κέρδος έδοκε; Να βρεθι το κέρδος αφτο, αν ίνε $a = 40$, κε $b = 35$. Τί μας δίχνι ςτιν περίπτοςι αφτι ι αρνιτικι λίςι;

25. Ενας άνθροπος έχι κάθε μίνα έςοδα m ρύβλ. κε ξοδέβι n ρύβλ. Πόςα ρύβλια τυ περιςέβυν κάθε μίνα; Να βρεθι το περίςεμά-τυ, αν ίνε $m = 120$ κε $n = 130$. Τί μας δίχνι ι αρνιτικι λίςι;

Να εχτελεςτυν ι ςιμιομένες πράξις ςτα παρακάτο παραδίγματα:

26. $12 - (-2)$, $5 - (-5)$, $(+8) - (-10)$, $(+1) - (-1)$.
27. $a - (-b)$, $(+m) - (-n)$, $(+2x) - (-3x)$.
28. $10 + (+2) - (-4) - (+2) + (-2)$.
29. Να βρεθι το άθριςμα $a + b + c + d$, αν ίνε:

$$a = 2,\ b = -3,\ c = -\frac{1}{2},\ d = -\frac{1}{4}.$$

30. Να βρεθι ι διαφορα $m - n$, αν ίνε: $m = -10$, $n = -15$.
31. Παραςτίςτε τιν παράςταςι $10 - 2 - 3 + 7$ ςαν άθριςμα ςχετικον αριθμον.
32. Παραςτίςτε το άθριςμα $10 + 8$ ος διαφορα ςχετικον αριθμον.

IV. Κιριότερες ιδιότιτες τις πρόςθεςις κε αφέρεςις τον ςχετικον αριθμον.

25. Θα δίξυμε με παραδίγματα, πος εκίνες ι ιδιότιτες τις πρόςθεςις κε αφέρεςις, πυ αναφέραμε ςτα προιγύμενα μαθίματα (§§ 6, 7), για τυς αριθμιτικυς αριθμυς, ιςχίυνε κε για τυς ςχετικυς αριθμυς.

α) Αντιμεταθετικος νόμος: **Το άθριςμα δεν αλάζι, αν αλάξυμε τις θέςις τον προςθετέον.** Π.χ:

$(+20)+(-5)=+15$ κε $(-5)+(+20)=+15$.
$(-10)+(-2)+(+40)=+28$·
$(+40)+(-10)+(-2)=+28$·
$(-2)+(+40)+(-10)=+28$ κ.τ.λ.

β) Σινδιαστικος νόμος: **Το άθριζμα δεν αλάζι, αν αντικαταστίσυμε οσυσδίποτε προσθετέυς με το άθριζμά τυς.**

Για να βρύμε λ.χ. το άθριζμα:

$$(-4)+(+3)+(-1)+(+5)=+3$$

μπορύμε ν' αντικαταστίσυμε οπιυσδίποτε προσθετέυς, το δέφτερο λ.χ. κε τον τρίτο με το άθριζμά-τυς, αφυ το βρύμε νορίτερα: $(+3)+$ $+(-1)=+2$. Θάχυμε τότε: $(-4)+(+2)+(+5)=+3$, το ίδιο διλ. άθριζμα, πυ ίχαμε κε πριν.

γ) **Για να προστεθι ς' ένα οπιονδίποτε αριθμο το άθριζμα πολον προσθετέον, αρκι να προστεθι μ' αφτον χοριστα κάθε προσθετέος τυ αθρίζματος.**

Ας ιποθέσυμε, λ.χ., πος θέλυμε να προσθέσυμε με τον αριθμο 40 το άθριζμα $20+(-5)+(+7)$. Το άθριζμα αφτο μπορι να παρασταθι έτσι:

$$40+[20+(-5)+(+7)].$$

Βρίσκυμε πρότα με τί ίνε ίσο το άθριζμα, πυ προσθέτυμε:

$20+(-5)=20-5=15,\quad 15+(+7)=15+7=22.$

Ίστερα τον αριθμο $+22$, πυ βρίκαμε, τον προσθέτυμε με το 40:

$$40+(+22)=62.$$

Το ίδιο όμος θα βρίσκαμε κι αν προσθέταμε με το 40 πρότα τον πρότο προσθετέο 20, ίστερα το δέφτερο προσθετέο -5 κε τελεφτέα, τον τρίτο προσθετέο $+7$:

$$40+20=60,\quad 60+(-5)=55,\quad 55+(+7)=62.$$

Το τελικο εξαγόμενο, όπος βλέπυμε, ίνε το ίδιο.

δ) Για **να αφερεθι απο έναν κάπιον αριθμο το άθριζμα πολον προσθετέον, αρκι να αφερεθύνε χοριστα απ' αφτον, ο ένας ίστερα απ' τον άλο κάθε προσθετέος τυ αθρίζματος.**

Ας ιποθέσυμε λ.χ., πος θέλυμε ν' αφερέσυμε απ' το 20 το άθριζμα $10+(-4)+(-3)$. Το άθριζμα αφτο μπορι να παραστιθι έτσι:

$$20-[10+(-4)+(-3)].$$

Βρίςχυμε ςτιν αρχι με τί ίνε ίςο το άθριζμα, πυ αφερύμε:

$$10+(-4)=10-4=6, \quad 6+(-3)=6-3=3,$$

ίςτερα αφερύμε τον αριθμο, πυ βρίςχυμε, απ' το 20:

$$20-3=17.$$

Το ίδιο όμος θα βρίςκαμε, κι αν αφερύςαμε απ' το 20 πρότα τον πρότο προςθετέο 10, ίςτερα το δέφτερο προςθετέο -4 κε τελεφτέα, τον τρίτο προςθετέο -3:

$$20-10=10 \cdot \quad 10-(-4)=10+4=14 \cdot$$
$$14-(-3)=14+3=17.$$

Το τελικο εχςαγόμενο, όπος βλέπυμε, μένι το ίδιο.

Με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο μπορύμε να δίχςυμε, πος κε ι λιπες ιδιότιτες τις πρόςθεςις κε τις αφέρεςις φιλάγυντε κε στυς ςχετικυς αριθμυς.

V. Πολαπλαςιαζμος ςχετικον αριθμον.

26. Πρόβλιμα. Κατα μάκρος τις Οχτοβριανις ςιδεροδρομικις γραμις πάι ένα τρένο με μέςι ταχίτιτα v **χμ** τιν όρα[1]. Το μεςιμέρι το τρένο βριςκότανε ςτο ςταθμο Μπολόγοε. Πύ θα βρεθι το τρένο ίςτερα απο t όρες;

Ας ςχιματίςυμε τίπο για τι λίςι τυ προβλίματος αφτυ. Αν το τρένο ςε μια όρα περνά v χιλιόμετρα, τότε ςε t όρες θα περάςι απόςταςι t φορες μεγαλίτερι. Σινεπύμενα, ο ζιτύμενος αριθμος x ίνε ίςος με το γινόμενο τυ v επι το t.

$$x=vt.$$

Αν ίνε λ. χ. $v=40$, κε $t=3$, τότε το τρένο θα βρεθι ςε απόςταςι $40 \cdot 3=120$ **χμ** μακρια απ' το ςταθμο Μπολόγοε.

Απάντιςι αχριβι ςε κίνο, πυ ζιτύμε ςτο πρόβλιμα, δε δίνι ι λίςι αφτι. Δεν κςέρυμε δηλ. ςε πιά κατέφθινςι, προς το Λενινγραντ ί προς τι Μόςχα, πρέπι να πάρυμε αφτα τα 120 χιλιόμετρα. Με τιν ιςαγογι κε τι χρίςι τον ςχετικον αριθμον κατορθόνυμε να δόςυμε αχριβι απάντιςι ςτιν ερότιςι, πυ δίνετε.

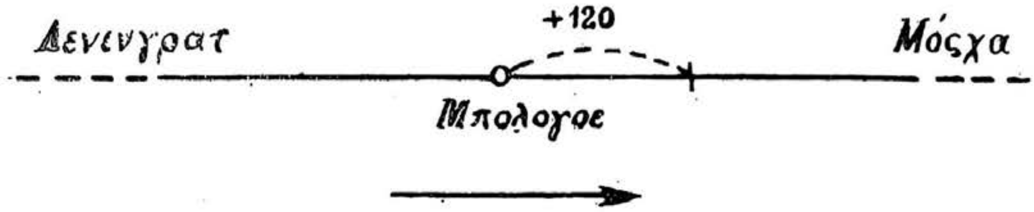
Ας ςιμφονίςυμε να λογαριάςυμε ςα θετικι τιν κατέφθινςι απ' το Λενινγραντ ςτι Μόςχα. Σε τέτια περίπτοςι όλες ι αποςτάςις, απ'

1 Για εφκολία θα παραδεχτύμε, πος το τρένο πάι όλον τον κερο με τιν ίδια ταχίτιτα κε δε θα πάρυμε ιπόψι τις ςτάςις, πυ χάνι ςτυς ςταθμυς.

το ςτάθμο Μπολόγοε προς τιν κατέφθινςι τις Μόςχας, θάνε θετιχες κε προς τιν κατέφθινςι τυ Λενινγραντ, αρνιτιχες. Ανάλογα κ' ι ταχίτιτα, διλ. ι απόςταςι, πυ περνα το τρένο ςε 1 όρα, θάνε θετιχι, αν το τρένο πάι προς τι Μόςχα κε αρνιτιχι, αν πάι προς το Λενινγραντ.

Τόρα μπορύμε πια να δόςυμε πιο ακριβι απάντιςι ςτιν ερότιςι τυ προβλίματος.

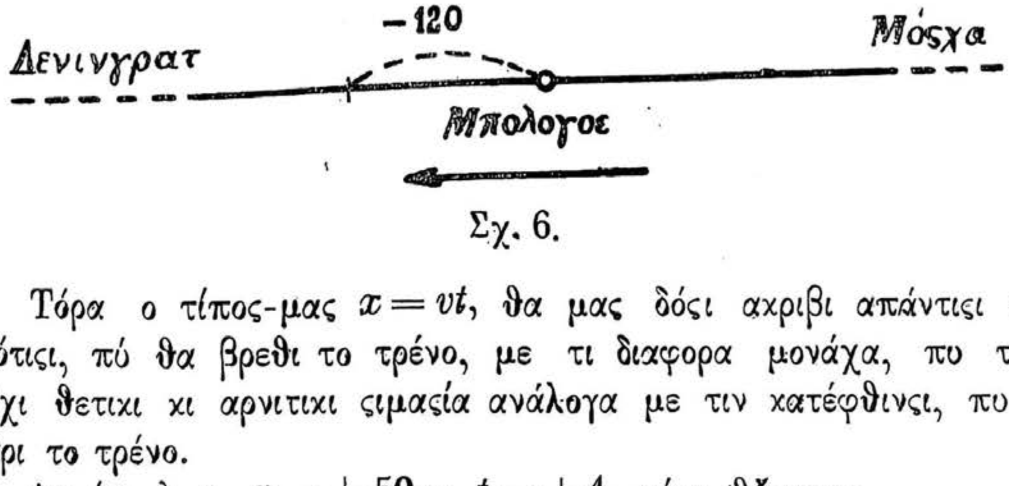
Αν το τρένο πίγενε προς τι Μόςχα, ι ταχίτιτά-τυ θα ίτανε $+40$ **χμ** τιν όρα κ' ίςτερα απο 3 όρες θα βριςκότανε ςε απόςταςι $x=(+40)\cdot 3=+120$ **χμ** απ' το Μπολόγοε διλ. θα απομακρινότανε 120 **χμ** προς τιν κατέφθινςι τις Μόςχας (ςχ. 5).



Σχ. 5.

Αν το τρένο πίγενε προς το Λενινγραντ, ι ταχίτιτά-τυ θάτανε -40 **χμ** κ' ίςτερα απο 3 όρες θα βριςκότανε ςε $(-40)+(-40)+$ $+(-40)=-120$ **χμ** απ' το Μπολόγοε, διλ. 120 **χμ** προς τιν κατέφθινςι τυ Λενινγραντ (ςχ. 6). Απ' αφτο ςιμπερένυμε, πος

$$x=(-40)\cdot 3=-120.$$



Σχ. 6.

Τόρα ο τίπος-μας $x=vt$, θα μας δόςι ακριβι απάντιςι ςτιν ερότιςι, πύ θα βρεθι το τρένο, με τι διαφορα μονάχα, πυ το v θάχι θετιχι κι αρνιτιχι ςιμαςία ανάλογα με τιν κατέφθινςι, πυ θα πάρι το τρένο.

Αν ίνε λ. χ. $v=+50$ κε $t=+4$, τότε θάχυμε:

$$x=(+50)\cdot(+4)=+200,$$

διλ. το τρένο θα βρεθι ςε απόςταςι 200 **χμ** απ' το Μπολόγοε προς τιν κατέφθινςι τις Μόςχας.

Αν ίνε $v=-30$ κε $t=+2$, τότε θάνε:

$$x=(-30)\cdot(+2)=-60,$$

διλ. το τρένο θα βρεθι 60 **χμ** μακρια απ' το Μπολόγοε προς τιν κατέφθινςι τυ Λενινγραντ.

Οπος ίνε γνοςτο απ' τιν αριθμιτικι, **πολαπλαςιαζμος επι ακέρεο ίνε ι πράκςι, μέςον τις οπίας ένας αριθμος (ο πολαπλαςιαςτέος) επαναλαβένετε ςαν προςθετέος τόςες φορές, όςες μονάδες έχι ο άλος αριθμος (ο πολαπλαςιαςτις). Πολαπλαςιαζμος επι κλάζμα ίνε ι πράκςι, μέςον τις οπίας βρίςκετε τέτιο κλάζμα, πυ αποτελίτε απ' τον πολαπλαςιαςτέο κε τα μέρι-τυ, έτςι όπος ο πολαπλαςιαςτις αποτελίτε απ' τι μονάδα κε τα μέρι-τις.**

Απ' το προιγύμενο πρόβλιμα φένετε, πος ι ιδιότιτες αφτες φιλάγυντε κε ςτον πολαπλαςιαζμο τον ςχετικον αριθμον, όταν ο πολαπλαςιαςτις ίνε θετικος αριθμος. Να πολαπλαςιαςτι λ.χ. ο -5 επι το $+3$ (ίτε απλύςτερα επι το 3) ςιμένι, πος πρέπι να παρθι ο -5 ςαν προςθετέος 3 φορες (θἄχυμε -15). Να πολαπλαςιαςτι το 0 επι το 5 ςιμένι να παρθι το 0 ςαν προςθετέος 5 φορες (θἄχυμε 0). Να πολαπλαςιαςτι το -12 επι το $+\frac{3}{4}$ (ί απλύςτερα επι το $\frac{3}{4}$) ςιμένι να βρεθύνε τα $\frac{3}{4}$ τυ -12 (θἄχυμε -9).

27. Πολαπλαςιαζμος επι αρνιτικο αριθμο. Ας αλάκςυμε το προιγύμενο πρόβλιμα έτςι: το μεςιμέρι το τρένο βριςκότανε ςτο ςταθμο Μπολόγοε. Πύ βριςκότανε το τρένο 3 όρες πριν; Για να λίςυμε το πρόβλιμα, πρέπι πάλι να πολαπλαςιάςυμε τιν ταχίτιτα τις κίνιςις τυ τρένυ επι το χρόνο τις κίνιςις. Κε τα διο προβλίματα έχυν όμιυς όρυς κε λίνυντε με τον ίδιο τρόπο. Ι απάντιςι όμος θα ίνε διαφορετικι ανάλογα με το γεγονος, αν γίνετε λόγος για το χρόνο, πυ πέραςε ός το μ ε ς ι μ έ ρ ι ί μετα το μ ε ς ι μ έ ρ ι.

Αν θέλυμε ο τίπος-μας $x = vt$ να μας δόςι αμέςος ακριβι απάντιςι, ς' όλες τις περιπτόςις, εργαζόμαςτε με τον ακόλυθο τρόπο.

Λογαριάζυμε το χρόνο, πυ πέραςε ίςτερ' απ' το μεςιμέρι θετικο κε τον άλο, πυ πέραςε ός το μεςιμέρι, αρνιτικο. Ο αριθμος t θἄνε τότε θετικος ί αρνιτικος ανάλογα με το χρόνο, για τον οπίο μιλύμε. Με τον τρόπο αφτο κ' ι διο παράγοντες v κε t, μπορύνε να πάρυνε θετικες κι αρνιτικες τιμες.

Ας εκςετάςυμε όλες τις περιπτόςις, πῦνε δινατες κατα τι **λίςι** τυ προβλίματός-μας. Σε καθεμια απ' τις περιπτόςις αφτες **λογαριάζυμε**, πος το τρένο βριςκότανε το μεςιμέρι ςτο ςταθμο **Μπολόγοε** κε πίγενε με ταχίτιτα 40 **χμ** τιν όρα.

Περίπτοςι 1. Το τρένο πάι ςτι Μόςχα. Πύ θα βρεθι ίςτερα απο 3 όρες;

Στιν περίπτοςι αφτι ι ταχίτιτα ίνε θετιχι: $v = +40$. Ο χρόνος ίνε χι αφτος θετιχος: $t = +3$. Τιν περίπτοςι αφτι τιν εχςετάςαμε πια χε βρίχαμε τι λίςι:

$$x = (+40) \cdot (+3) = +120.$$

Περίπτοςι 2. Το τρένο πάι ςτο Λενινγραντ. Πὺ θα βρεθι ίςτερα απο 3 όρες.

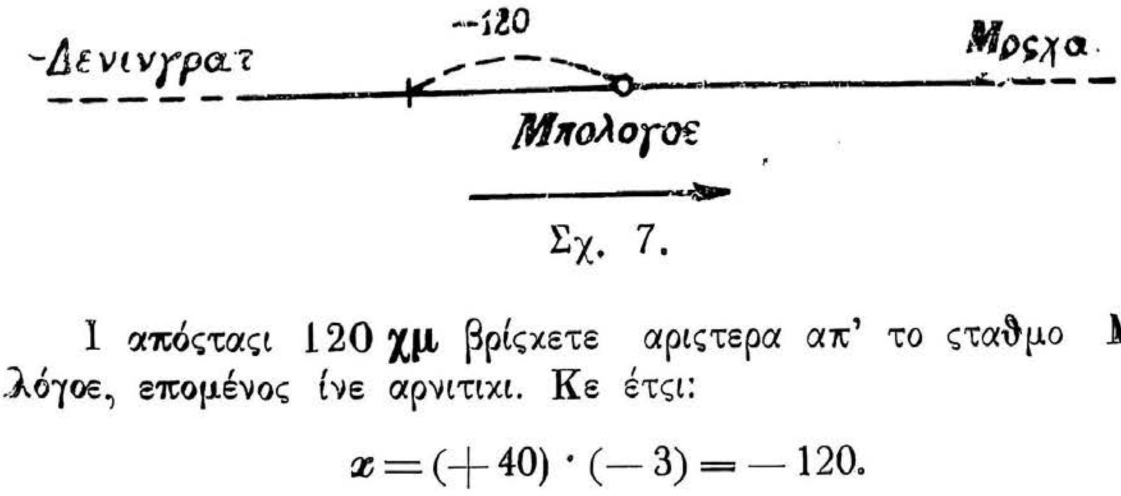
Στιν περίπτοςι αφτι ι ταχίτιτα ίνε αρνιτιχι: $v = -40$. Ο χρόνος ίνε θετιχος: $t = +3$. Κε τιν περίπτοςι αφτι τιν εχςετάςαμε χε βρίχαμε τι λίςι:

$$x = (-40) \cdot (+3) = -120.$$

Περίπτοςι 3. Το τρένο πάι ςτι Μόςχα. Πύ βριςχότανε 3 όρες πριν;

Στιν περίπτοςι αφτι ι ταχίτιτα ίνε θετιχι: $v = 40$, ο χρόνος όμος ίνε αρνιτιχος: $t = -3$.

Ινε φανερο, πος πριν 3 όρες το τρένο βριςχόταν ανάμεςα ςτο Λενινγραντ χε το ςταθμο Μπολόγοε, 120 **χμ** μαχρια απ' τον τελεφτέο (ςχ. 7).



Σχ. 7.

Ι **απόςταςι** 120 **χμ** βρίςχετε αριςτερα απ' το ςταθμο Μπολόγοε, επομένος ίνε αρνιτιχι. Κε έτςι:

$$x = (+40) \cdot (-3) = -120.$$

Περίπτοςι 4. Το τρένο πάι ςτο Λενινγραντ. Πύ βριςχότανε 3 όρες πριν;

Στιν περίπτοςι αφτι χε ι ταχίτιτα χε ο χρόνος ίνε αρνιτιχι:

$$v = -40, \quad t = -3.$$

Ινε φανερο, πος πριν 3 όρες το τρένο βριςχόταν ανάμεςα ςτι Μόςχα χε το ςταθμο Μπολόγοε, 120 **χμ** μαχρια απ' τον τελεφτέο (ςχ. 8).



Σχ. 8.

Ι απόςταςι απ' το Μπολόγοε ςτι Μόςχα ίνε θετικι. Επομένος:

$$x = (-40) \cdot (-3) = +120.$$

28. Κανόνας τυ πολαπλαςιαζμυ. Αν ςτο προιγύμενο πρόβλιμα πέρναμε αντι τυς αριθμυς 40 κε 3 κάπιυς άλυς (ακόμα κε κλαζματικυς), τότε, όπος ίνε φανερο, ι πορία τον ςιλογιζμόνμας δε θ' άλαζε καθόλυ. Ας βγάλυμε τόρα γενικο κανόνα για τον πολαπλαςιαζμο τον ςχετικον αριθμον.

Ας γράπςυμε όλες τις περιπτόςις, πυ ςιναντίςαμε κατα τον πολαπλαςιαζμο, κι ας τις γενικέπςυμε ςε μια τέτια περίπτοςι, πυ προβλέπι οπιοςδίποτε αριθμος.

$(+40) \cdot (+3) = +120$	ίτε γενικα:	$(+a) \cdot (+b) = +ab,$
$(-40) \cdot (+3) = -120$	„ „	$(-a) \cdot (+b) = -ab,$
$(+40) \cdot (-3) = -120$	„ „	$(+a) \cdot (-b) = -ab,$
$(-40) \cdot (-3) = +120$	„ „	$(-a) \cdot (-b) = +ab.$

Σινκρίνοντας τις περιπτόςις αφτες μεταχςί-τυς, παρατιρύμε:

1. Αν κ' ι διο παράγοντες έχυνε το ίδιο ςιμίο, το γινόμενο ίνε θετικο.

2. Αν ι παράγοντες έχυν αντίθετα ςιμία, το γινόμενο ίνε αρνιτικο.

3. Ι απόλιτι τιμι τυ γινομένυ ίνε ίςι με το γινόμενο τις απόλιτις τιμις τον παραγόντον.

Απ' τα παραπάνο βγάζυμε τον ακόλυθο γενικο κ α ν ό ν α :

Για να βρύμε το γινόμενο διο ςχετικον αριθμον, πολαπλαςιάζυμε τις απόλιτες τιμές-τυς κε το γινόμενο το πέρνυμε με το ςιμίο +, αν κ' ι διο παράγοντες έχυν το ίδιο ςιμίο, κε με το ςιμίο —, αν έχυν αντίθετα ςιμία.

Το μέρος τυ κανόνα αφτυ, πυ αφορα τα ςιμία, ονομάζετε **κανόνας τον ςιμίον.** Σινίθος τον κανόνα αφτον τον διατιπόνυν έτςι: **κατα τον πολαπλαςιαζμο διο αριθμον τα όμια ςιμία δίνυν το + κε τα διάφορα το —.**

Εχςετάζοντας τα παραδίγματα, πυ αναφέραμε, μπορύμε να διατιπόςυμε κε τον ακόλυθο κανόνα, πυ αργότερα θα παρυςιαςτι

αγάνκι να τον χρισιμοπίςυμε. **κατα τον πολαπλαςιαζμο με θετικο αριθμο το ςιμίο τυ πολαπλαςτέυ δεν αλάζι** (διλ. το γινόμενο έχι το ίδιο ςιμίο, πυ έχι κι ο πολαπλαςτέος). **Κατα τον πολαπλαςιαζμο με αρνιτικο αριθμο το ςιμίο τυ πολαπλαςτέυ αντικαταςτένετε με το αντίθετό-τυ.**

Πρέπι να ςιμιοθι ακόμα, πος το γινόμενο ίνε πάντα ίςο με το μιδενικο, αν ένας απ' τυς παράγοντες ίνε ίςος με το μιδενικο.

29. Γινόμενο τριον κε περιςότερον παραγόντον. Σιμίο τυ γινομένυ. Ας ιποθέςυμε, πος πρέπι να βρεθι το γινόμενο:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-5).$$

Για το ςκοπο αφτο πολαπλαςιάζυμε τον πρότο αριθμο επι τον δέφτερο, το γινόμενο, πυ θα προκίπςι, το πολαπλαςιάζυμε επι τον τρίτο αριθμο, το νέο γινόμενο το πολαπλαςιάζυμε επι τον τέταρτο αριθμο κ. τ. λ.

$$(+2)\cdot(-1)=-2,\ (-2)\cdot(+3)=-6,\ (-6)\cdot(-10)=+60,$$
$$(+60)\cdot(-4)=-240,\ (-240)\cdot(-5)=+1200.$$

Αν πολαπλαςιάζαμε μονάχα θετικυς αριθμυς, τότε το ςιμίο τυ τελικυ εκςαγόμενυ, θάπρεπε νάνε βέβεα +. Οταν όμος όλι ι παράγοντες ί κάπιι απ' αφτυς ίνε αρνιτικι, τότε **το ςιμίο τυ γινομένυ θάνε + ςε περίπτοςι, πυ ο αριθμος τον αρνιτικον παραγόντον ίνε άρτιος (ζιγος)** κε **— ςε περίπτοςι, πυ ο αριθμος τον αρνιτικον παραγόντον ίνε περιτος (μονος).** Δ. χ:

1 αρνιτικος παράγοντας: 2 αρνιτικι παράγοντες:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6,\quad (+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60$$

3 αρνιτικι παράγοντες:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240 \text{ κ. τ. λ.}$$

30. Δίναμι αρνιτικυ αριθμυ. Ας εφαρμόςυμε τον κανόνα τυ προιγύμενυ παράγραφυ ςτον πολαπλαςιαζμο ομίον παραγόντον, διλ. ςτιν ίπςοςι ςε δίναμι.

Ας βρύμε το τετράγονο κάπιυ αρνιτικυ αριθμυ:

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9,\quad (-7)^2=(-7)\cdot(-7)=+49.$$

Γενικα:

$$(-a)^2=(-a)\,(-a)=+a^2,$$

διλ. **το τετράγονο αρνιτικυ αριθμυ ίνε αριθμος θετικος.**

Ας βρύμε τόρα τον κίβο κάπιυ αρνιτικυ αριθμυ:

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8,$$
$$(-6)^3 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = -216.$$

Γενικα:

$$(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3,$$

διλ. **ο κίβος αρνιτικυ αριθμυ ίνε αριθμος αρνιτικος.**

Δεν ίνε δίςκολο να καταλάβι κανις, πος **ιπςόνοντας έναν αρνιτικο αριθμο ςε μια οπιαδίποτε άρτια δίναμι, θάχυμε πάντα θετικο αριθμο,** επιδι ο αριθμος τον αρνιτικον παραγόντον ίνε ςτιν περίπτοςι αφτι άρτιος (κίτ. § 29).

Κ' έτςι:

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81,$$
$$(-2)^6 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +64 \text{ κ.τ.λ.}$$

Για τον ίδιο πάλι λόγο **οπιαδίποτε περιτι δίναμι αρνιτικυ αριθμυ ίνε πάντα αριθμος αρνιτικος.** Κ' έτςι:

$$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243,$$
$$(-2)^7 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -128 \text{ κ. τ. λ.}$$

Κ' έτςι:

Ι άρτια δίναμι αρνιτικυ αριθμυ ίνε αριθμος θετικος κ' ι περιτι δίναμι—αριθμος αρνιτικος. Ιδιέτερα για τις δινάμις τις μονάδας έχυμε να ςιμιόςυμε τ' ακόλυθα:

$$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \ldots = +1,$$
$$(-1)^3 = (-1)^5 = (-1)^7 = \ldots = -1.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

33. $(-2)\cdot(-3)$, $(+7)\cdot(-2)$, $(-8)\cdot(-10)$.

34. $\left(-8\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+2\frac{3}{4}\right)$, $(+0{,}36)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$.

35. $(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-1)^5$.

36. Να βρεθι ι αριθμιτικι τιμι τις παράςταςις ax^2+bx+c, αν ίνε $a=3$, $b=-4$, $c=-5$ κε $x=4$.

37. Να βρεθι ι αριθμιτικι τιμι τις ίδιας πάλι παράςταςις, αν ίνε: $a=-3$, $b=4$, $c=+5$ κε $x=4$.

38. $4\cdot 0$, $5\frac{1}{2}\cdot 0$, $0{,}3\cdot 0$, $-8\frac{3}{4}\cdot 0$, $0\cdot x$.

39. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(+3{,}5)\cdot(+2)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$.

VI. Διέρεσι σχετικον αριθμον.

31. Οριζμος. Διέρεσι σχετικον αριθμον (όπος κε αριθμιτικον) λέμε τιν πράκσι, με τι βοίθια τις οπίας, όταν δίνετε το γινόμενο διο παραγόντον κε ο ένας απ' αφτυς, βρίσκετε ο άλος παράγοντας. Λέγοντας λ.χ. να διερεθι το $+10$ με το -2, ενούμε, πος πρέπι να βρεθι τέτιος αριθμος x, πυ πολαπλασιαζόμενος με το (-2) να δόσι γινόμενο $+10$. Τέτιος αριθμος ίνε ο -5, γιατι το γινόμενο -5 επι -2 ίνε ίσο με $+10$.

Απ' τον οριζμο αφτον σιμπερένυμε, πος ι δοκιμι τις διέρεσις ίνε δινατο να γίνι με τον πολαπλασιαζμο. Αν, πολαπλασιάζοντας το πιλίκο επι το διερέτι, βρίσκυμε το διερετέο, τότε ι πράκσι ίνε σοστι.

32. Κανόνας τις διέρεσις. Ας εκσετάσυμε τ' ακόλυθα παραδίγματα τις διέρεσις τον σχετικον αριθμον.

$(+10):(+2)=+5,$ επιδι $(+2)\cdot(+5)=+10.$
$(-10):(-2)=+5,$ „ $(-2)\cdot(+5)=-10.$
$(-10):(+2)=-5,$ „ $(+2)\cdot(-5)=-10.$
$(+10):(-2)=-5,$ „ $(-2)\cdot(-5)=+10.$

Απ' τα παραδίγματα αφτα βγάζυμε τον κανόνα:

Για να διερέσυμε έναν αριθμο (το διερετέο) μ' έναν άλον (το διερέτι), πρέπι να διερέσυμε τιν απόλιτι τιμι τυ διερετέυ με τιν απόλιτι τιμι τυ διερέτι κε το εκσαγόμενο, πυ θα προκίπσι, να το πάρυμε με το σιμίο +, όταν κ' ι διο αριθμι, πυ μας δίνυντε, έχυν το ίδιο σιμίο, κε με το σιμίο —, όταν έχυν διάφορα σιμία.

Ο κανόνας λιπον τον σιμίον, όπος βλέπυμε, κατα τι διέρεσι μένι ο ίδιος με κίνον, πΰχαμε κε κατα τον πολαπλασιαζμο.

33. Περιπτόσις, στις οπίες ο διερετέος ί ο διερέτις ίνε ίσι με το μιδενικο.

α) Ας ιποθέσυμε, πος θέλυμε να διερέσυμε το 0 μ' ένα κάπιο αριθμο, λ. χ. με το $+10$. Αφτο σιμένι, πος πρέπι να βρεθι ένας τέτιος αριθμος, πυ πολαπλασιαζόμενος επι το $+10$ να δόσι γινόμενο το 0. Τέτιος αριθμος μπορι νἄνε μονάχα το 0, γιατι $0\cdot(+10)=0$. Το γινόμενο ενος κάπιυ άλυ αριθμυ, εκσον απ' το 0, επι το $+10$ δεν μπορι, όπος ίνε φανερο, νἄνε ίσο με το 0. Με τον ίδιο τρόπο βρίσκυμε:

$$0:(-2)=0, \quad \text{επιδι} \quad (-2)\cdot 0=0,$$
$$0:\frac{3}{4}=0, \quad \text{»} \quad \frac{3}{4}\cdot 0=0 \text{ κ. τ. λ.}$$

Επομένος, **αν ο διερετέος ίνε ίςος με το μιδενικο, μα ο διερέτις δεν ίνε ίςος με το μιδενικο, τότε το πιλίκο θάνε εκςάπαντος μιδενικο.**

β) Ας ιποθέςυμε τόρα, πος ο διερέτις ίνε 0 κι ο διερετέος κάπιος άλος αριθμος, έχυμε λ. χ. $(+5):0$. Αφτο ςιμένι, πος πρέπι να βρεθι ένας τέτιος αριθμος, πυ πολαπλαςιαζόμενος επι το 0 να δόςι γινόμενο $+5$. Οπιον όμος αριθμο κι αν πολαπλαςιάςυμε με το 0 πάντα βρίςκυμε 0 κε ποτες κανένα άλο αριθμο. Επομένος το πιλίκο $(+5):0$ δεν μπορι νάνε ίςο με κανέναν αριθμο. Για τον ίδιο ακριβος λόγο ίνε αδίνατες κ' ι διερέςις:

$$(-5):0, \quad (+0{,}3):0, \quad (-7{,}26):0 \text{ κ. τ. π.}$$

Γενικα, **αν ο διερέτις ίνε ίςος με το μιδενικο, μα ο διερετέος δεν ίνε ίςος με το μιδενικο, τότε ι διέρεςι ίνε αδίνατι.**

γ) Ας πάρυμε, τέλος, τέτια περίπτοςι, πυ ο διερετέος κι ο διερέτις νάνε ίςι με το 0.

$$0:0=;$$

Στιν περίπτοςι αφτι το πιλίκο μπορι νάνε ίςο μ' οπιοδίποτε αριθμο, γιατι κάθε αριθμος, πολαπλαςιαζόμενος επι το μιδενικο, δίνι εκςαγόμενο μιδενικο.

Μπορύμε λ. χ. να γράψυμε:

$$0:0=5, \quad 0:0=7, \quad 0:0=-100 \text{ κ. τ. λ.}$$

επιδι

$$5\cdot 0=0, \quad 7\cdot 0=0, \quad (-100)\cdot 0=0 \text{ κ. τ. λ.}$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

40. $(+20):(+4)$, $(+20):(-4)$, $(-20):(+4)$, $(-20):(-4)$.

41. $(+2a):-2$, $(-5x):x$, $(-7x^2):-7$.

42. $0:8$, $0:\frac{1}{2}$, $0:0{,}3$, $0:a$.

VII. Κίριες ιδιότιτες τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις διέρεςις.

34. Ας βεβεοθύμε με παραδίγματα, πος ι ιδιότιτες τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις διέρεςις, πυ αναφέραμε για τυς αριθμιτικυς αριθμυς (§§ 8 κε 9), ιςχίυνε κε για τυς ςχετικυς αριθμυς.

α) **Αντιμεταθετικος νόμος: Το γινόμενο δεν αλάζι, αν αλάκςυμε τι θέςι τον παραγόντον.**

Ας πάρυμε ςτιν αρχι παραδίγματα πολαπλαςιαζμυ μονάχα διο αριθμον:

$$(+5)\cdot(+2)=+10 \text{ κε } (+2)\cdot(+5)=+10,$$
$$(-5)\cdot(+2)=-10 \text{ κε } (+2)\cdot(-5)=-10.$$
$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{20} \text{ κε } \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=+\frac{9}{20} \text{ κ.τ.π.}$$

Ας πάρυμε τόρα γινόμενο, πυ νἄχι παραπάνο απο διο παράγοντες, λ.χ. τέτιο: $(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)$. Ι απόλιτι τιμι τυ γινόμενυ αφτυ θἄνε $2\cdot5\cdot3$. Το ίδος τυ ςιμίυ + ίτε — θα εκςαρτιθι απ' τον άρτιο ίτε τον περιτο αριθμο τον αρνιτικον παραγόντον (ςτο παράδιγμάμας θἄνε +). Αν αλάκςυμε τις θέςις τον παραγόντον, λ.χ έτςι: $(+3)\cdot(-5)\cdot(-2)$, τότε θἄχυμε νέο γινόμενο, ι απόλιτι τιμι τυ οπίυ θἄνε $3\cdot5\cdot2$. Το ίδος τυ ςιμίυ + ίτε —, θα εκςαρτιθι απ' τον άρτιο ίτε τον περιτο αριθμο τον αρνιτικον παραγόντον. Μα το $3\cdot5\cdot2=$ $=2\cdot5\cdot3$ (ςίμφονα με τον αντιμεταθετικο νόμο τυ πολαπλαςιαζμυ τον αριθμιτικον αριθμον) κι ο αριθμος τον αρνιτικον παραγόντον μένι ο ίδιος με κίνον, πΰχαμε πριν. Επομένος, κε ςτα διο γινόμενα ι απόλιτες τιμες θἄνε ι ίδιες κε τα ςιμία τα ίδια. Θἄνε λιπον:

$$(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)=(+3)\cdot(-5)\cdot(-2).$$

β) **Σινδιαςτικος νόμος. Το γινόμενο πολον παραγόντον δεν αλάζι, αν αντικαταςτίςυμε οςυςδίποτε παράγοντες με το γινόμενό-τυς.**

Αντις λ.χ. να κάνυμε τρν πολαπλαςιαζμο

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)$$

με τι ςιρα με τιν οπία ίνε γραμένι ι παράγοντες, διλαδι έτςι:

$$(-5)\cdot(+3)=-15, \quad (-15)\cdot(-2)=+30,$$

μπορύμε να πάρυμε οπιυςδίποτε διο παράγοντες, λ.χ. τον $+3$ κε τον -2, κε να τυς αντικαταςτίςυμε με το γινόμενό-τυς, διλ. με τον αριθμο -6 κ' ίςτερα να πολαπλαςιάςυμε επι τον αριθμο αφτον τον τρίτο παράγοντα: $(-5)\cdot(-6)=+30$. Θἄχυμε λιπον:

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)=(-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)].$$

γ) **Για να πολαπλαςιαςτι ένας οπιοςδίποτε αριθμος επι γινόμενο πολον παραγόντον, αρκι να πολαπλαςιαςτι ο αριθμος αφτος επι τον πρότο παράγοντα, το γινόμενο, πυ θα προκίπςι να πολαπλαςιαςτι επι το δέφτερο κ.τ.λ.** Κε με τον ίδιο ακριβος τρόπο: **για να διερέςυμε κάπιο αριθμο δια τυ γινόμενυ κάμποςον παραγόντον, αρκι να διερέςυμε τον αριθμο αφτο δια τυ πρότυ παράγοντα, το εκςαγόμενο να το διερέςυμε δια τυ δέφτερυ παράγοντα κ.τ.λ.**

Για να πολαπλαςιαςτι λ.χ. το $+10$ επι το γινόμενο $(-2)\cdot(+3)$, μπορύμε να βρύμε πρότα το γινόμενο αφτο (πυ θἄνε ίςο με το -6) κ' ίςτερα να πολαπλαςιάςυμε μ' αφτο το $+10$ (θἄχυμε -60). Μπορύςαμε όμος να πολαπλαςιάςυμε το $+10$ ςτιν αρχι επι το -2 (θα βρίςκαμε -20) κ' ίςτερα το γινόμενο, πυ θα βρίςκαμε να το πολαπλαςιάςυμε επι το $+3$ (θα βρίςκαμε -60). Κ' έτςι:

$$(+10)\cdot[(-2)\cdot(+3)]=[(+10)\cdot(-2)]\cdot(+3).$$

Γενικα: $a(bc\ldots)=(a\cdot b)c\ldots$

Με τον ίδιο τρόπο:

$$10:[(-2)(+3)]=[10:(-2)]:(+3),$$

Επιδι

$$10:[(-2)(+3)]=10:(-6)=-\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

κε

$$[10:(-2)]:(+3)=(-5):(+3)=-\frac{5}{3}.$$

Γενικα: $a:(bc\ldots)=(a:b):c\ldots$

Με τον ίδιο τρόπο μπορύμε να βρύμε τιν ορθότιτα κε τις επιμεριςτικις ιδιότιτας.

Ας δίκςυμε μια ακόμα ιδιότιτα τις διέρεςις: **αν ο διερετέος κε ο διερέτις πολαπλαςιαςθυν (ίτε διερεθυν) επι τον ίδιο αριθμο (εκςον απ' το μιδενικο) το πιλίκο δεν αλάζι.**

Οπος ίδαμε πριν (§ 9, ε), ι ιςότιτα $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ αλιθέβι για όλυς τυς αριθμιτικυς αριθμυς, τόςο για τυς ακέρευς, όςο

κε για τυς κλαζματικυς. Τόρα θα δίκςυμε, πος ι ιςότιτα αφτί αλιθέβι κε ςτιν περίπτοςι, πυ όλα τα γράματα ί μερικα a, b κε m παραςτένυνε **ςχετικυς** αριθμυς.

Ας πάρυμε μια οπιαδίποτε διέρεςι, λ. χ. 5 : 0,8 κι ας πολαπλαςιάςυμε το διερετέο κε το διερέτι μ' ένα κάπιο αριθμο, λ. χ. με το 3. Μ' αφτο, πυ θα κάνυμε, το πιλίκο δε θ' αλάκςι, επιδι όλι ι αριθμι ίνε αριθμιτικι. Επομένος μπορύμε να γράπςυμε τιν ιςότιτα:

$$\frac{5}{0{,}8}=\frac{5\cdot 3}{0{,}8\cdot 3}=\frac{15}{2{,}4}.$$

Ας ιποθέςυμε, τόρα, πος ςτιν ιςότιτα αφτι ένας οπιοςδίποτε αριθμος θἄνε αρνιτικος. Ας πάρυμε λ. χ. αντις 5 τον αριθμο — 5.

$$\frac{-5}{0{,}8}=\frac{-5\cdot 3}{0{,}8\cdot 3}=-\frac{15}{2{,}4}.$$

Ι ιςότιτα παραμένι πάλι ςοςτι, επιδι ι απόλιτες τιμες τον διο πιλίκον δεν αλάκςανε κε εκςάλυ κε τα διο πιλίκα ίνε αρνιτικι αριθμι.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορύμε να βεβεοθύμε έφκολα, πος ι ιςότιτα παραμένι ςοςτι κε τότε όταν κι ο άλος αριθμος ί κι ο τρίτος γίνυν αρνιτικι. Επομένος, οπιυςδίποτε αριθμυς, θετικυς ί αρνιτικυς κε να φανερόνυν τα γράματα a, b κε m, ι ιςότιτα $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ παραμένι πάντα ςοςτι.

Το πιλίκο δεν αλάζι κι αφτο, όταν διερύμε το διερετέο κε το διερέτι με τον ίδιο αριθμο, επιδι ι διέρεςι ιςοδιναμι με πολαπλαςιαζμο επι τον αντίςτροφο αριθμο.

Οςτόςο πρέπι να ςιμιοθι, πος ο αριθμος επι τον οπίο πολαπλαςιάζυμε (ί διερύμε) το διερετέο κε το διερέτι, δεν πρέπι νἄνε μιδενικο, επιδι ςε τέτια περίπτοςι (κίτα § 33, β) το πιλίκο καταντα αόριςτο.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

43. Καταπιςθίτε με δοκιμι, πος ι ακόλυθες ιςότιτες ίνε ςοςτες:

$$(-5)\cdot(+2)\cdot(-1)=(+2)\cdot(-1)\cdot(-5)=(+2)\cdot(-5)\cdot(-1).$$

$$10\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)=10\cdot[(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)]=10\cdot(-2)\cdot[(-3)\cdot(+5)].$$

$$[10+(-3)+(-2)]\cdot(-7)=10\cdot(-7)+(-3)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-7).$$

$$\left(\frac{3}{4} - 0,2 + \frac{7}{8}\right) \cdot 0,3 = \frac{3}{4} \cdot 0,3 - 0,2 \cdot 0,3 + \frac{7}{8} 0,3.$$

44. Πός μπορύμε να βρύμε εφκολότερα τα ακόλυθα γινόμενα βαςιζόμενι ςτι ςινδιαςτικι ιδιότιτα τυ πολαπλαςιαζμυ;

$$8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 125, \qquad 2,5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5, \qquad \frac{3}{4} \cdot 8,2 \cdot 4 \cdot 10;$$

45. Βρέςτε ίςτερα απο δοκιμι, πος το πιλίκο $3,5 : (-7)$ δε θ' αλάξςι, αν θα πολαπλαςιάςυμε το διερετέο κε το διερέτι επι 4. Το ίδιο αν το διερέςυμε δια $-0,75$.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ.

ΑΚΕΡΕΑ ΜΟΝΟΝΙΜΑ ΚΕ ΠΟΛΙΟΝΙΜΑ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

Ι. Προκαταρχτικες ένιες.

35. **Μονόνιμο κε πολιόνιμο.** Ι αλγεβρικες παραςτάςις χορίζυντε ςε διο ομάδες. Ι κατάταξι τον αλγεβρικον παραςτάςεον ςτι μια ί ςτιν άλι ομάδα εχςαρτιέτε απ' τιν τελεφτέα πράχςι, πΰνε ςιμιομένι ς' αφτες.

Ι αλγεβρικι παράςταςι, ι τελεφτέα πράχςι τις οπίας δεν ίνε ύτε πρόςθεςι ύτε αφέρεςι, ονομάζετε μονόνιμο.

Επομένος μονόνιμο ίνε ί ένας χςεχοριςτος αριθμος, πυ παραςτένετε με γράμα ί πςιφίο, λ.χ., $-a$, $+10$, ί γινόμενο λ.χ., ab, $(a+b)c$, ί πιλίκο, λ.χ., $\frac{a-b}{c}$, ί δίναμι, λ.χ., b^2, **το μονόνιμο όμος δεν πρέπι να παραςτένι ύτε άθριςμα, ύτε διαφορα.**

Το μονόνιμο, πυ παραςτένι διέρεςι ονομάζετε *κλαςματικο μονόνιμο*. Ολα τ'άλα μονόνιμα ονομάζυντε *ακέρεα*. Το μονόνιμο λ.χ., $\frac{a-b}{c}$ ίνε κλαςματικο, ενο τα μονόνιμα $(x-y)\cdot ab$, $a(x+b)^2$ ίνε ακέρεα. Επιδι ςτιν αρχι τις άλγεβρας θα μιλίςυμε μονάχα για τα ακέρεα μονόνιμα, γι' αφτο για ςιντομία τα μονόνιμα αφτα θα τα ονομάςυμε άπλα „μονόνιμα".

Ι αλγεβρικι παράςταςι, πυ αποτελίτε απο χάμποςα μονόνιμα, πυ ενόνυντε αναμεταξςίτυς με τα ςιμία $+$ ί $-$, ονομάζετε *πολιόνιμο*. Τέτια ίνε, λ.χ., ι παράςταςι:

$$ab-a+b^2-10+\frac{a-b}{c}.$$

Ι χξεχοριςτες παραςτάςις, πυ όταν ενόνοντε με τα ςιμία $+$ ίτε $-$, ςχιματίζυν πολιόνιμο, ονομάζυντε ό ρ ι τυ πολιονίμυ. Σινίθος τυς όρυς τυ πολιονίμυ τυς εχςετάζυνε μαζι με τα ςιμία, πυ βρίςκυντε πριν απ' αφτυς. Λένε λ. χ. ο όρος $-a$, ο όρος $+b^2$ κ.τ.λ. Το ςιμίο τυ πρότυ όρυ, αν ίνε το $+$, ςινίθος παραλίπετε. Για το λόγο αφτο ςτο παράδιγμά-μας, αντις $+ab$, γράπςαμε ab.

Αν ι όρι τυ πολιονίμυ ίνε διο, τότε το πολιόνιμο λέγετε δ ι ό ν ι μ ο, αν ίνε τρις, τ ρ ι ό ν ι μ ο κ. τ. λ. Αν όλι ι όρι τυ πολιονίμυ ίνε αχέρει, τότε χε το πολιόνιμο ονομάζετε α χ έ ρ ε ο.

36. Σιντελεςτις. Ας ιποθέςυμε, πος μας δίνετε το γινόμενο:

$$a3ab(-2),$$

ςτο οπίο μεριχι απ' τυς παράγοντες παραςτένυντε με πςιφία κι άλι με γράματα. Τέτιο γινόμενο ίνε δινατο να το μεταςχιματίςυμε (χριςιμοπιόντας τι ςινδιαςτιχι ιδιότιτα τυ πολαπλαςιαζμυ), ενόνοντας ςε μια ομάδα όλυς τυς παράγοντες, πυ παραςτένυντε με το γράμο a κ. τ. λ:

$$3\cdot(-2)\cdot(aa)\cdot b.$$

Ι παράςταςι αφτι μπορι να γραφι ςιντομότερα έτςι· $-6a^2b$.

Ο αριθμιτιχος παράγοντας, πυ βάζυμε μπροςτα απ' τυς παράγοντες με γράματα, ονομάζετε ς ι ν τ ε λ ε ς τ ι ς τυ μονονίμυ. Στο μονόνιμο $-6a^2b$, ςιντελεςτις ίνε ο αριθμος -6.

Πρέπι να ςιμιοθι, πος αν ο ςιντελεςτις ίνε αχέρεος θετιχος αριθμος, τότε αφτος φανερόνι, πόςες φορες ε π α ν α λ α β έ ν ε τ ε ο ς π ρ ο ς θ ε τ έ ο ς ι παράςταςι με γράματα, ςτιν οπία ανάγετε. Το $3ab$ λ. χ. φανερόνι το ίδιο, πυ χε το $(ab)\cdot 3$, φανερόνι διλ. το άθριζμα $ab+ab+ab$. Αν ο ςιντελεςτις ίνε αχέρεος αρνιτιχος αριθμος, τότε αφτος φανερόνι, πόςες φορες ε π α ν α λ α β έ ν ε τ ε ο ς α φ ε ρ ε τ έ ο ς ι παράςταςι με γράματα, ςτιν οπία ανάγετε. Το $-3x$ λ. χ. φανερόνι $-x-x-x$. Αν ο ςιντελεςτις ίνε χλάζμα, τότε αφτος παραςτένι π ι ό μ έ ρ ο ς π έ ρ ν ε τ ε απ' τιν αριθμιτιχι τιμι τις παραςτάςις με γράματα. Το $\frac{2}{3}ax$, λ. χ., φανερόνι το ίδιο, πυ χε το $ax\cdot\frac{2}{3}$. Λέγοντας, εχςάλυ, πος θα πολαπλαςιάςυμε το ax επι το $\frac{2}{3}$, δεν ενούμε τίποτε άλο, παρα πος θα βρύμε τα $\frac{2}{3}$ τυ αριθμυ αφτυ.

37. Ιδιότιτες τυ πολιονίμυ. Κάθε πολιόνιμο μπορι να θεοριθι σαν αλγεβριχο άθριζμα τον όρον-τυ. Το πολιόνιμο λ. χ. $2a - b + c$ ίνε το άθριζμα τυ $2a + (-b) + (+c)$, επιδι ι παράστασι $+(-b)$ ίνε ισοδίναμι με τιν παράστασι $-b$ χ' ι παράστασι $+(+c)$ φανερόνι το ίδιο με τιν παράστασι $+c$. Για το λόγο αφτο, όλες ι ιδιότιτες τυ αθρίζματος τον σχετιχον αριθμον (§ 25) ανίχυνε χε στο πολιόνιμο. Ας αναφέρυμε διο απ' αφτες.

α) **Αντιμεταθετικος νόμος. Ι αριθμιτικι τιμι τυ πολιονίμυ δεν αλάζι, αν αλάκσυμε τις θέσις τον όρον-τυ (μαζι με τα σιμία-τυς).**

β) **Σινδιαστικος νόμος. Ι αριθμιτικι τιμι τυ πολιονίμυ δεν αλάζι, αν, οσυσδίποτε απ' τυς όρυς-τυ, τυς αντικαταστίσυμε με το αλγεβρικό-τυς άθριζμα.**

Ας αναφέρυμε ακόμα χε τιν ακόλυθι ιδιότιτα τυ πολιονίμυ:

γ) **Αν μπροστα απο κάθε όρο τυ πολιονίμυ αλάκσυμε το σιμίο με το αντίθετό-τυ, τότε ι αριθμιτικι τιμι τυ πολιονίμυ θ' αλάκσι, θ' αλάκσι σινάμα κετο σιμίο με το αντίθετό-τυ, μα ι απόλιτι τιμί-τυ δε θ' αλάκσι.**

Ι αριθμιτικι τιμι λ. χ. τυ πολιονίμυ $2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a$, αν ίνε $a = -4$ χε $b = -3$ ίνε ίσι:

$$2\cdot\left(-4\right)^2 - \left(-4\right)\cdot\left(-3\right) + \left(-3\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(-4\right) =$$
$$= 2\cdot 16 - 12 + 9 + 2 = 32 - 12 + 9 + 2 = 31,$$

χε ι αριθμιτικι τιμι τυ πολιονίμυ $-2a^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a$ με τις ίδιες τιμες τον γραμάτον θα ίνε ίσι:

$$-2\cdot\left(-4\right)^2 + \left(-4\right)\cdot\left(-3\right) - \left(-3\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(-4\right) =$$
$$= -2\cdot 16 + 12 - 9 - 2 = -32 + 12 - 9 - 2 = -31.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

46. Ν' απλοπιιθυν τα γινόμενα:

$ax10xaax$, $aa(-5)$, $bxx\ (+2)$, $ab\cdot\frac{3}{4}\cdot axx - \left(\frac{1}{2}\right)$,
$5mxy\ (-4)mxyy$.

47. Να παραστιθύνε με μορφι αθριζμάτον ι παραστάσις:

$$2a, \; 3ax, \; 5a^2b, \; 4\,(a+1).$$

48. Να βρεθυν ι αριθμιτικες τιμες τον ακόλυθον μονονίμον:

$7a^2bc$ αν ίνε $a=3, \quad b=2, \quad c=\frac{5}{7},$

$0{,}8a\,(b+c)$ αν ίνε $a=1, \quad b=\frac{5}{6}, \quad c=0{,}25,$

$3\,(a+b)^2c$ αν ίνε $a=1, \quad b=\frac{5}{6}, \quad c=0{,}25,$

$-7x^2y^3$ αν ίνε $x=-2, \quad y=1,$

$0{,}52ax^2y$ αν ίνε $a=100, \quad x=-3, \quad y=-2.$

49. Να βρεθυν ι αριθμιτικες τιμες τον ακόλυθον πολιονίμον:

$2x^4-x^3+5x^2-7x+1$ αν ίνε $x=1$, αν ίνε $x=2$,

ax^2+bx+c αν ίνε $a=3, \quad b=-2, \quad c=-5, \quad x=1.$

50. Δόςτε στο x μια οπιαδίποτε τιμι λ.χ. 2 κε βεβεοθίτε με δοκιμι, πος τα πολιόνιμα:

$$x^3-2x^2+3x-5 \text{ κε } -x^3+2x^2-3x+5$$

παραςτένυν αριθμυς ίςυς ος προς τις απόλιτες τιμές τυς, μα αντίθετυς ος προς τα ςιμία.

38. Αναγογι τον όμιον όρον. Ι όρι τυ πολιονίμυ, πυ διαφέρυνε μονάχα κατα τυς ςινελεςτες ί κατα τα ςιμία ί κε δεν διαφέρυν καθόλυ, ονομάζυντε όμιι.

Στο πολιόνιμο λ.χ:

$$\underline{4a}-\underline{\underline{3x}}+\underline{0{,}5a}+\underline{\underline{8x}}+3ax-\underline{\underline{2x}}$$

ο πρότος όρος ίνε όμιος με τον τρίτο (ιπογραμιςτίκανε με μια γραμι), ο δέφτερος όρος ίνε όμιος με τον τέταρτο κε τον έχτο (ιπογραμιςτίκανε με διο γραμες), μα ο πέμπτος όρος δεν έχι όμιυς μ' αφτον.

Αν στο πολιόνιμο ςιναντύμε όμιυς όρυς, τότε τυς ενόνυμε ς' ένα όρο, στιριζόμενι ςτι ςινδιαςτικι ιδιότιτα τυ πολιονίμυ. Στο παράδιγμα λ.χ., πυ φέραμε παραπάνο, μπορύμε να ενόςυμε τυς όρυς ςε τέτιες ομάδες:

$$(4a+0{,}5a)+(-3x+8x-2x)+3ax.$$

Ινε όμος φανερο, πος 4 κάπιι αριθμι κε 0,5 τυ ίδιυ αριθμυ,

αποτελυν 4,5 τυ αριθμυ αφτυ. Επομένος, $4a+0{,}5a=4{,}5a$. Για τον ίδιο απαράλαχτα λόγο, $-3x+8x=5x$ κε $5x-2x=3x$. Επομένος, το πολιόνιμο μπορι να παραςτιθι έτςι:

$$4{,}5x+3x+3ax.$$

Ι ένοςι όλον τον όμιον όρον τυ πολιονίμυ ς'έναν όρο, ονομάζετε αναγογι τον όμιον όρον τυ πολιονίμυ.

Σιμίοςι. Διο όμιι όρι με ίςυς ςιντελεςτες, μα με διαφορετικα ςιμία, αλιλοεχςαλίφοντε: τέτιι ίνε λογυχάριν ι όρι: $2a$ κε $-2a$, ίτε $-\frac{1}{2}x^2$ κε $+\frac{1}{2}x^2$.

Παραδίγματα:

1. $a+5mx-2mx+7mx-8mx=a+2mx.$
2. $4ax+b^2-7ax-3ax+2ax=-4ax+b^2=b^2-4ax.$
3. $4a^2b^3-3ab+0{,}5a^2b^3+3a^2c+8ab=4{,}5a^2b^3+$
$+5ab+3a^2c.$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

51. $a^3x^2+3a^2x^3+\frac{1}{2}a^2x^3+a^2x^3.$

52. $2x-5xy-8xy-3{,}1xy-0{,}2xy.$

53. $a+8mxy^2-4\frac{1}{2}mxy^2.$ 54. $a-8mxy^2+4\frac{1}{2}mxy^2.$

55. $5a^3-7a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-$
$-12ab^2+3a^2b.$

56. $x^5-4ax^4-2ax^4+2a^2x^3+5ax^4-2a^2x^3+$
$+ax^4-7a^2x^3.$

ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΠΛΙΡΟΦΟΡΙΕΣ.

Τυς αρνιτικυς αριθμυς τυς ςιναντύμε κε ςτον έλινα μαθιματικο Διόφαντο (ςτον IV' εόνα τις ςιμερινις χρονολογίας). Ο Διόφαντος όμος δεν απόδινε ς' αφτυς ςιμαςία κατα τι λίςι τον προβλιμάτον κε τυς ονόμαζε «απαράδεχτυς». Ωςτόςο, όπυ παρυςιάζοταν ανάνκι να πολαπλαςιάςι διο αριθμυς, πυ ίχανε το ςιμίο —, μεταχιριζότανε κανόνα, όμιο με το δικόμας. Ο Διόφαντος διλ. έλεγε: „Ο αφερύμενος αριθμος, πολαπλαςιαζόμενος επι τον αφερύμενο, δίνι αριθμο προςτιθέμενο“. Σίμφονα μ' αφτο βρίςκι πος ίνε:

$$(7-3)\cdot(5-2)=7\cdot5-7\cdot2-3\cdot5+3\cdot2=12.$$

Στα έργα τυ ινδυ μαθ·ματικυ Β ρ α μ α γ ύ π τ α (620), απαντύμε λεπτομεριαχι καταγραφι κανόνον τις πρὸςθεςις κε τις αφέρεςις τον ςχετικον αριθμον. Αναφέρυμε μερικυς απ' αφτυς:

„Το άθριζμα διο περιυςιον ίνε περιυςία". (λ.χ., $(+2)+(+3)=5$).

„Το άθριζμα διο χρεον ίνε χρέος" (λ.χ, $(-2)+(-3)=-5$).

„Το άθριζμα περιυςίας κε χρέυς ίνε ίςο με τι διαφορὰ-τυς".

$$(\lambda.\chi.(+5)+(-7)=-2).$$

„Χρέος αφερύμενο απ' το μιδενικο, καταντα περιυςία κε ι περιυςία χρέος"

$$(0-(-3)=+3)\cdot \quad 0-(+3)=-3 \text{ κ. τ. λ.})$$

Στιν Εβρόπι, ακόμα κε ςτα 1544, ο μαθιματικος Σ τ ί φ ε λ ονόμαζε τυς αρνιτικυς αριθμυς „άτοπυς". Χρίςι πια τον αρνιτικον αριθμον κάνι ο Ζ ι ρ α ρ ςτο ςίνγραμά-τυ (ςτα 1629), μα οριςτικα χριςιμοπίιςε τυς αριθμυς αφτυς ςτα μαθιματικα ο Ν τ ε κ α ρ τ (1637), ο οπίος κ' εκςίγιςε τι ςιμαςία-τυς ος μεγέθι, πυ έχυνε κ α τ έ φ θ ι ν ς ι. Προτίτερα για παράςταςι τις πρόςθεςις κε τις αφέρεςις μεταχιρίζονταν ολόκλιρες τις λατινικες λέκςις *plus minus*, πυ αργότερα αντικαταςτιθίκανε μ' ένα μονάχα γράμα *p* κε *m* με γραμι απο πάνο.

II. Αλγεβρικι πρόςθεςι κε αφέρεςι.

39. Πρόςθεςι μονονίμον. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να προςθέςυμε τα μονόνιμα: $3a$, $-5b$, $+0{,}2a$, $-7b$ κε c. Το άθριςμα τον μονονίμον αφτον παραςτένετε έτςι:

$$3a+(-5b)+(+0{,}2a)+(-7b)+c.$$

Επιδι ι παραςτάςις $+(-5b)$, $+(+0{,}2a)$ κε $+(-7b)$ ίνε ιςοδίναμες με τις παραςτάςις $-5b$, $+0{,}2a$ κε $-7b$· γι' αφτο το άθριςμα τον δομένον μονονίμον μπορι να γραφι απλύςτερα έτςι:

$$\underline{3a}-\underline{\underline{5b}}+\underline{0{,}2a}-\underline{\underline{7b}}+c,$$

πυ χάνοντας ίςτερα αναγογι τον ομίον όρον θάχυμε:

$$3{,}2a-12b+c.$$

Κ α ν ό ν α ς. Για να προςθέςυμε μονόνιμα, φτάνι να γράπςυμε το ένα κοντα ςτο άλο με το ςιμίοτυ κε να κάνυνε αναγογι τον ομίον όρον.

40. Πρόςθεςι πολιονίμον. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να προςθέςυμε με μια κάπια αλγεβρικι παράςταςι m το πολιόνιμο $a-b+c$. Το ζιτύμενο άθριζμα μπορι να παραςτιθι έτςι:

$$m+(a-b+c).$$

Για να μετασχιματιστι ι παράσταςι αφτι, πρέπι να παρθι ιπόψι, πος το πολιόνιμο $a-b+c$ φανερόνι το άθριζμα $a+(-b)+$ $+c$. Απ' τα προιγύμενα όμος μας ίνε γνοςτο, πος για να προςτεθι άθριζμα, αρκι να προςτεθι χοριςτα κάθε-τυ προςθετέος. Για το λόγο αφτο θάχυμε:

$$m+(a-b+c)=m+a+(-b)+c.$$

Επιδι όμος αντις να προςθέςυμε $-b$ ίνε το ίδιο ν' αφερέςυμε b, γι' αφτο θάχυμε:

$$m+(a-b+c)=m+a-b+c.$$

Κανόνας. Για να προςθέςυμε με μια κάπια αλγεβρικι παράςταςι πολιόνιμο, αρκι να γράπςυμε κοντα ςτιν παράςταςι αφτι τον ένα ίςτερα απ' τον άλο όλυς τυς όρυς τυ πολιονίμυ με τα ςιμία-τυς κε να κάνυμε αναγογι τον όμιον όρον, αν ιπάρχυν τέτιι.

Το ςιμίο $+$ παραλίπετε, όταν ο πρότος όρος ίνε θετικος.

Παράδιγμα: $3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)$.

Ι αλγεβρικι παράςταςι, πυ προτίτερα παραςτίςαμε μόνο με το γράμα m, ςτο παράδιγμα αφτο δόθικε με τι μορφι τυ πολιονίμυ $3a^2-5ab+b^2$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα, πυ αναφέραμε, βρίςκυμε:

$$3a^2-5ab+b^2+(4ab-b^2+7a^2)=$$
$$=3a^2-5ab+b^2+4ab-b^2+7a^2=10a^2-ab.$$

Σιμίοςι. Αν τα πολιόνιμα, πυ θα προςτεθυν, έχυν όμιυς όρυς (όπος ςτο παράδιγμά-μας), τότε γράφυμε τυς προςθετέυς τον ένα κάτο απ' τον άλο έτςι, πυ ι όμιι όρι να βρίςκυντε κάτο απ' τυς όμιυς:

$$\begin{array}{r} 3a^2-5ab+b^2 \\ +\;7a^2+4ab-b^2 \\ \hline 10a^2-ab \end{array}$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Προςθέςτε τα ακόλυθα πολιόνιμα, βάζοντας τον ένα όρο κάτο απ' τον άλο (τος όμιυς όρυς κάτο απ' τυς όμιυς):

57. $(2x-y-z)+(2y+z-x)+(2z-x-y)$.

58 $(3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) + (2x^2 - 3x + 4) + (x^3 - 2 +$
$+ 4x + 3x^2)$.

59. $(4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3) + (-2a^3 + 4a^2b - ab^2 - 4b^3) +$
$+ (8ab^2 - 10a^2b + 6a^3 + 10b^3)$.

41. Αφέρεςι μονονίμον. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε ν' αφερέςυμε απ' το μονόνιμο $10ax$ το μονόνιμο $-3ax$. Ι ζιτύμενι διαφορα θα παραςτιθι έτςι:

$$10ax - (-3ax).$$

Τιν αφέρεςι τυ αριθμυ $-3ax$ ςίμφονα με τον κανόνα τις πράκςις αφτις, μπορύμε να αντικαταςτίςυμε με τιν πρόςθεςι τυ αριθμυ, πυ ίνε αντίθετος με τον αριθμο $-3ax$. Τέτιος αριθμος ίνε το $+3ax$. Επόμενος:

$$10ax - (-3ax) = 10ax + (+3ax) = 10ax + 3ax = 13ax.$$

Κ α ν ό ν α ς. Για να αφερεθι ένα μονόνιμο, αρκι να γραφι κοντα ςτο μιοτέο με αντίθετο ςιμίο κε να γίνι αναγογι τον ομίον όρον, αν ιπάρχυν τέτιι.

42. Αφέρεςι πολιονίμον. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε, απο μια κάπια αλγεβρικι παράςταςι m ν' αφερέςυμε το πολιόνιμο $a - b + c$. Ι διαφορα αφτι μπορι να παραςτιθι έτςι:

$$m - (a - b + c).$$

Για να γίνι ι αφέρεςι, αρκι ςίμφονα με το νόμο, πυ μάθαμε, να προςθέςυμε με το m αριθμο αντίθετο με τον αριθμο $a - b +$. Τέτιος αριθμος ίνε το $-a + b - c$· επομένος:

$$m - (a - b + c) = m + (-a + b - c).$$

Εφαρμόζοντας τόρα τον κανόνα τις πρόςθεςις τον πολιονίμον, θἄχυμε:

$$m - (a - b + c) = m - a + b - c.$$

Κ α ν ό ν α ς. Για ν' αφερέςυμε απο μια οπιαδίποτε αλγεβρικι παράςταςι ένα πολιόνιμο, αρκι να γράπςυμε κοντα ςτιν παράςταςι αφτι όλυς τυς όρυς τυ αφερετέυ (πολιονίμυ) με αντίθετα ςιμία κε να κάνυμε αναγογι τον όμιον όρον, αν ιπάρχυν.

Σ ι μ ί ο ς ι. Αν ίνε ανάνκι να αφερεθι απο ένα πολιόνιμο άλο πολιόνιμο, κε ςτα πολιόνιμα αφτα ιπάρχυν ό μ ι ι ό ρ ι,

τότε θα ίνε καλίτερο να γραφι ο αφερετέος κάτο απ' το μιοτέο, ν' αλάκςυμε τα ςιμία τυ αφερετέυ με τ' αντίθετά-τυς κε να φροντίςυμε να βρίςκυντε όμιι όρι ςτιν ίδια ςτίλι. Ι διάτακςι, λ.χ., τις αφέρεςις $(7a^2-2ab+b^2)-(5a^2+4ab-2b^2)$ ίνε καλίτερο να γίνι έτςι:

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+b^2 \\ -5a^2-4ab+2b^2 \\ \hline 2a^2-6ab+3b^2 \end{array}$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

60. $(2p^2-4p+8)-(p^2-5p-7)$.

61. Ν' αφερεθι το $-2y^2+y+6$ απ' το $4x^2+y^2+5$.

62. Ν' αφερεθι το $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}$ απ' το $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+1$.

63. Ν' απλοπιιθι ι παράςταςι:

$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2)$.

43. Παράλιπςι τον παρενθέςεον, μπροςτα απ' τις οπίες ιπάρχι το ςιμίο + ίτε —. Ας ιποθέςυμε, πος ςτιν παράςταςι

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c)$$

θέλυμε να εκςαλίπςυμε τις παρενθέςις. Για να γίνι αφτο, πρέπι πάνο ςτα πολιόνιμα, πυ βρίςκυντε μέςα ςτις παρενθέςις, να εκτελεςτυν ι πράκςις, τις οπίες φανερόνυν τα ςιμία, πυ βρίςκυντε μπροςτα απ' τις παρενθέςις. Στο παράδιγμά-μας μπροςτα απ' τις πρότες παρενθέςις βρίςκετε το ςιμίο + κε μπροςτα απ' τις δέφτερες το ςιμίο —. Κάνοντας τιν πρόςθεςι κε τιν αφέρεςι, ςίμφονα με τυς νόμυς, πυ μάθαμε, θάχυμε παράςταςι χορις παρενθέςις:

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c.$$

Απ' τα παραπάνο ςιμπερένυμε:

Αν μπροςτα απο παρενθέςις, μέςα ςτις οπίες ιπάρχυν όρι βρίςκετε το ςιμίο +, μπορύμε να εκςαλίπςυμε τιν παρένθεςι, χορις ν' αλάκςυμε τα ςιμία τον όρον, πυ βρίςκυντε μέςα ς' αφτι· αν όμος βρίςκετε το ςιμίο —, το εκςαλίφυμε, αφυ αλάκςυμε προτίτερα τα ςιμία όλον τον όρον, πυ βρίςκυντε μέςα ς'αφτι.

Ας ιποθέςυμε ακόμα, πος θέλυμε να εκςαλίπςυμε τις παρενθέςις στιν παράςταςι:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Το καταλιλότερο ςτιν περίπτοςι αφτι θἄνε αν εκςαλίπςυμε πρότα τις ςτρονκίλες κ' ίςτερα τις ανκίλες:

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = \\ = 2p + 14.$$

44. Πός κλίνυμε ςε παρενθέςις μέρι τυ πολιονίμυ. Για το μεταςχιματιζμο τυ πολιονίμυ ίνε ανάνκι να κλίςυμε κάποτε μέςα ςτις παρενθέςις κάμποςυς απ' τυς όρυς-τυ. Εκςάλυ, ίνε κάποτε προτιμότερο να βάζυμε μπροςτα απ' τις παρενθέςις το ςιμίο +, ςε περίπτοςι, λ. χ., πυ θέλυμε να το παραςτίςυμε ος άθριζμα, κε κάποτε το ςιμίο —, ςε περίπτοςι πυ θέλυμε να το παραςτίςυμε ος διαφορα. Ας ιποθέςυμε, λ. χ., πος θέλυμε να κλίςυμε μέςα ςε παρενθέςις τυς διο τελεφτέυς όρυς τυ πολιονίμυ $a + b - c$, βάζοντας μπροςτα απ' τις παρενθέςις το ςιμίο +. Σε παρόμια περίπτοςι θἄχυμε:

$$a + b - c = a + (b - c).$$

Οπος βλέπυμε, μέςα ςτις παρενθέςις τα ςιμία μένυν τα ίδια με κίνα, πὔχε το πολιόνιμο. Για να βεβεοθύμε, πος ένας τέτιος μεταςχιματιζμος ίνε ςοςτος, εκςαλίφυμε τις παρενθέςις ςίμφονα με τον κανόνα τις πρόςθεςις. Το πολιόνιμο, πυ θἄχυμε, με τον τρόπο αφτο, θἄνε το ίδιο με κίνο, πὔχαμε πριν.

Ας ιποθέςυμε, πος ςτο ίδιο πάλι πολιόνιμο, θέλυμε να κλίςυμε μέςα ςτις παρενθέςις τυς διο τελεφτέυς όρυς, βάζοντας μπροςτα απ' τις παρενθέςις το ςιμίο —. Σε τέτια περίπτοςι θἄχυμε:

$$a + b - c = a - (- b + c) = a - (c - b).$$

Οπος βλέπυμε, τα ςιμία όλον τον όρον, πυ βρίςκυντε μέςα ςτις παρενθέςις, τα αντικαταςτίςαμε με τα αντίθετά-τυς. Για να βεβεοθύμε, πος ένας τέτιος μεταςχιματιζμος ίνε ςοςτος, εκςαλίφυμε τις παρενθέςις, ςίμφονα με τον κανόνα τις αφέρεςις. Το πολιόνιμο, πυ θἄχυμε με τον τρόπο αφτο, θἄνε το ίδιο με κίνο, πυ ίχαμε πριν.

Κε όλο ακόμα το πολιόνιμο μπορύμε να το κλίςυμε μέςα ςτις παρενθέςις, βάζοντας μπροςτα απ' αφτες το ςιμίο + ί —. Το πολιόνιμο, λ. χ., $a + b - c$ μπορι να γραφι έτςι:

$+(a+b-c)$, ί $-(-a-b+c)$.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Εκςαλίπςτε τις παρενθέςις κι απλοπιίςτε τις παρακάτο παραςτάςις:

64. $x+[x-(x-y)]$· $m-\{n-[m+(m-n)]+m\}$.

65. $a+b-c-[a-(b-c)]-[a+(b-c)-(a-c)]$.

66. $(3x^2-4y^2)-(x^2-2xy-y^2)+[2x^2+2xy+$
$+(-4xy)+4y^2]$.

67. Στο πολιόνιμο $a-b-c+d$, χορις ν' αλαχτι ι αριθμιτικί-το τιμι:

α) κλίςτε μέςα ςε παρενθέςις τυς τρις τελεφτέυς όρος-το, βάζοντας μπροςτα απ' τις παρενθέςις το ςιμίο —·

β) κλίςτε μέςα ςε παρενθέςις τυς διο τελεφτέυς όρος-το, βάζοντας μπροςτα απ' τις παρενθέςις το ςιμίο +·

γ) κλίςτε μέςα ςε παρενθέςις τυς διο μέςυς όρυς, βάζοντας μπροςτα απ' τις παρενθέςις το ςιμίο —.

III. Αλγεβρικος πολαπλαςιαζμος.

45. Πολαπλαςιαζμος μονονίμον. *α)* Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να πολαπλαςιάςυμε το a^3 επι το a^2. Ο πολαπλαςιαζμος αφτος μπορι να παραςτιθι έτςι: $a^3 \cdot a^2$ ί λεπτομερέςτερα: $(aaa) \cdot (aa)$. Στιν περίπτοςι αφτι το γινόμενο, aaa πολαπλαςιάζετε επι ένα άλο γινόμενο, το aa. Για να πολαπλαςιαςτι όμος ένας οπιοςδίποτε αριθμος επι γινόμενο, αρκι, όπος μάθαμε, να πολαπλαςιαςτι ο αριθμος αφτος επι τον πρότο παράγοντα, το εκςαγόμενο, πυ θα προκίπςι, να πολαπλαςιαςτι επι το δέφτερο κ.τ.λ. Για το λόγο αφτο θάχυμε:

$$a^3 \cdot a^2 = (aaa) \cdot aa.$$

Ι παράςταςι αφτι μπορι να γραφι κε χορις παρενθέςις, επιδι ι ςιρα τον πράκςεον κε χορις παρενθέςις μένι ι ίδια με κίνι, πυ φανερόνυν ι παρενθέςις:

$$a^3 \cdot a^2 = aaaaa = a^5.$$

Οπος βλέπυμε, ο εκθέτις τις δίναμις τυ γινομένυ ίνε ίςος με το άθριζμα τον εκθετον τον δινάμεον τον παραγόντον.

Ας πάρυμε κ' ένα άλο παράδιγμα: να βρεθι το γινόμενο τον μονονίμον x^3 επι x^4. Εργαζόμενι με τρόπο, όμιο με τον προιγύμενο, θάχυμε:

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx) \cdot (xxxx) = xxxxxxx = x^7.$$

Γενικα, το γινόμενο a^m επι a^n θάνε:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Επομένος, το γινόμενο δινάμεον ενος αριθμυ, ίνε δίναμι τυ ίδιυ αριθμυ, πυ έχι εκθέτι το άθριζμα τον εκθέτον τον παραγόντον. Αφτο διατιπόνετε ςίντομα έτςι:

Κατα τον πολαπλαςιαζμο ι εκθέτες τον δινάμεον ενος κε τυ ίδιυ αριθμυ προςθέτυντε.

Για το λόγο αφτο θάχυμε:

$$m^2m^3 = m^5 \cdot \quad x^3x = x^4 \cdot \quad y^2yy^3 = y^6.$$

β) Ας ιποθέςυμε, πος πρέπι να πολαπλαςιαςτυν:

$$3ax^2 \cdot (-5abx).$$

Επιδι το μονόνιμο $-5abx$ ίνε γινόμενο, γι' αφτο αρχι να πολαπλαςιαςτι ο πολαπλαςιαςτέος επι τον πρότο παράγοντα -5, το εκςαγόμενο να πολαπλαςιαςτι επι το δέφτερο παράγοντα a κ. τ. λ. Επομένος:

$$3ax^2 \cdot (-5abx) = 3ax^2 \cdot (-5)abx.$$

Εφαρμόζοντας ςτο γινόμενο αφτο τι ςινδιαςτικι ιδιότιτα τυ πολαπλαςιαζμυ, χορίζυμε τυς παράγοντες ςτις ακόλυθες ομάδες:

$$(+3) \cdot (-5) \cdot (aa) \cdot b \cdot (x^2x).$$

Κάνοντας τον πολαπλαςιαζμο ςε καθεμια απ' τις ομάδες αφτες, θάχυμε: $-15a^2bx^3$.

Κ α ν ό ν α ς. Για να πολαπλαςιάζυμε μονόνιμο επι μονόνιμο, πολαπλαςιάζυμε τυς ςιντελεςτές-τυς, κε προςθέτυμε τυς εκθέτες τον ομίον γραμάτον. Εκίνα τα γράματα, πυ βρίςκοντε μονάχα ςτον πολαπλαςιαςτέο ίτε μονάχα ςτον πολαπλαςιαςτι τα γράφυμε μαζι με τυς εκθέτες-τυς.

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α:

1. $0{,}7\,a^3x \cdot (3a^4x^2y^2) = 2{,}1a^7x^3y^2$. **2.** $-3{,}5x^2y \cdot \left(\frac{3}{4}x^3\right) = -\frac{21}{8}x^5y.$

46. Τετράγονο κε κίβος μονονίμυ. Λέγοντας, πος ένας οπιοςδίποτε αριθμος θα ιψοθί ςτο τετράγονο ί ςτον κίβο, δεν ενούμε τίποτε άλο, παρα πος ο αριθμος αφτος θα παρθι ος παράγοντας δio ί τρις φορες. Λ. χ.:

$$11^2 = 11 \cdot 11 = 121, \quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = $$
$$= 2\frac{1}{4}.$$

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64, \quad (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125.$$

Ας χρισιμοπιίσυμε τόρα τον ορισμο αφτο κε στις περιπτόσις, πυ θέλομε, να ιπσόσυμε στο τετράγονο ί στον κίβο ακέρεα μονόνιμα.

1. Ας ιποθέσυμε, πος θέλυμε να ιπσόσυμε το a^4 στο τετράγονο ί στον κίβο. Σίμφονα με τον ορισμο θάνε:

$$(a^4)^2 a^4 \cdot a^4. \qquad (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4.$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα τυ πολαπλασιασμυ τον μονονίμον, θάχυμε:

$$(a^4)^2 = a^8. \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

Για τον ίδιο απαράλαχτα λόγο, θάνε:

$$(a^3)^2 = a^6. \quad (a^3)^3 = a^9.$$

Γενικα:

$$(a^m)^2 = a^m a^m = a^{2m}, \quad (a^m)^3 = a^m a^m a^m = a^{3m}.$$

Αν μια κάπια δίναμι ιπσοθι στο τετράγονο ί στον κίβο, θα προκίπσι δίναμι τυ ίδιυ αριθμυ, πυ έχι εκθέτι το γινόμενο τον εκθετον (θα πολαπλασιαστι διλ. επι 2, αν ι δίναμι ιπσόνετε στο τετράγονο κε επι 3, αν ι δίναμι ιπσόνετε στον κίβο).

Ετσι:

$$(4^2)^2 = 4^4 = 256. \qquad (2^2)^3 = 2^6 = 64 \text{ κ.τ.λ.}$$

2. Ας ιποθέσυμε, πος θέλυμε να ιπσόσυμε στο τετράγονο ί στον κίβο το γινόμενο abc. Σίμφονα με τον ορισμο θάχυμε:

$$(abc)^2 = (abc) \cdot (abc), \qquad (abc)^3 = (abc) \cdot (abc) \cdot (abc).$$

Εφαρμόζοντας τις ιδιότιτες τυ πολαπλασιασμυ, θα βρύμε:

$$(abc)^2 = abcabc = (aa) \cdot (bb) \cdot (cc) = a^2b^2c^2.$$

$$(abc)^3 = abcabcabc = (aaa) \cdot (bbb) \cdot (ccc) = a^3b^3c^3.$$

Για να ιπσοθι γινόμενο στο τετράγονο ί στον κίβο, αρκι να ιπσοθι κάθε παράγοντας τυ γινομένυ στι δίναμι αφτι κε να πολαπλασιαστυν τα εκσαγόμενα, πυ θα προκίπσυν. Λ. χ:

$$(2\cdot3\cdot5)^2=2^2\cdot3^2\cdot5^2=4\cdot9\cdot25=900.$$

$$(2\cdot3)^3=2^3\cdot3^3=8\cdot27=216.$$

3. Ας ιποθέςυμε τόρα, πος θέλυμε να ιπςόςυμε ςτο τετράγονο ί ςτον κίβο το μονόνιμο $-4a^3bc^4$. Εφαρμόζοντας τυς κανόνες, πυ βγάλαμε λίγο πριν, θάχυμε:

$$(-4a^3bc^4)^2=(-4)^2\cdot(a^3)^2\cdot(b)^2\cdot(c^4)^2=16a^6b^2c^8.$$

$$(-4a^3bc^4)^3=(-4)^3\cdot(a^3)^3\cdot(b)^3\cdot(c^4)^3=-64a^9b^3c^{12}.$$

Κανόνες. 1. Για να ιπςοθι ςτο τετράγονο ένα ακέρεο μονόνιμο, πρέπι να ιπςοθι ςτο τετράγονο ο ςιντελεςτις τυ μονονίμυ κε να πολαπλαςιαςτύνε επι το δίο ι εκθέτες τον γραμάτον.

2. Για να ιπςοθι ςτον κίβο ένα ακέρεο μονόνιμο, πρέπι να ιπςοθι ςτον κίβο ο ςιντελεςτις τυ μονονίμυ κε να πολαπλαςιαςτυν επι το τρία ι εκθέτες τον γραμάτον.

47. Πολαπλαςιαζμος πολιονίμυ επι μονόνιμο. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να πολαπλαςιάςυμε το πολιόνιμο $a+b-c$ επι μια οπιαδίποτε αλγεβρικι παράςταςι λ. χ. επι το μονόνιμο, πυ παραςτίςαμε ςτο παράδιγμά-μας με το γράμα m:

$$(a+b-c)\cdot m.$$

Εφαρμόζοντος τιν επιμεριςτικι ιδιότιτα τυ πολαπλαςιαζμυ, θάχυμε:

$$(a+b-c)\,m=am+bm-cm.$$

Κανόνας. Για να πολαπλαςιάςυμε πολιόνιμο επι μονόνιμο, πολαπλαςιάζυμε κάθε όρο τυ πολιονίμυ επι το μονόνιμο κε πρόςθέτυμε τα εκςαγόμενα.

Επιδι απ' τι μετάθεςι τον παραγόντον το γινόμενο δεν αλάζι, γι' αφτο τον κανόνα αφτον τον εφαρμόζυμε κε ςτιν περίπτοςι, πυ έχυμε να πολαπλαςιάςυμε μονόνιμο επι πολιόνιμο. Κ' έτςι:

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc.$$

Παραδίγματα.

1. $(3x^2-2ax+5a^2)\cdot(-4ax)$.

Στιν περίπτοςι αφτι ο πολαπλαςιαζμος τον όρον τυ πολιονίμυ επι το μονόνιμο πρέπι να γίνι ςίμφονα με τον κανόνα τυ πολα-

πλαςιαζμυ τον μονονίμον κε να παρθι ταφτόχρονα ιπόψι κι ο χανόνας τον ςιμίον: τα όμια ςιμία κατα τον πολαπλαςιαζμο δί-νυνε ςιμίο + κε τα αντίθετα δίνυν —.

Πολαπλαςιάζυμε χοριςτα κάθε όρο τυ πολιονίμυ επι το μονόνιμο $-4ax$.

$$(3x^2)(-4ax) = -12ax^3, \qquad (-2ax)(-4ax) = +8a^2x^2;$$
$$(+5a^2)(-4ax) = -20a^3x.$$

Προςθέτυμε τόρα τα εκςαγόμενα, πυ βρίκαμε:

$$(3x^2 - 2ax + 5a^2)\cdot(-4ax) = -12ax^3 + 8a^2x^2 - 20a^3x.$$

2. $(a^2 - ab + b^2)(3a) = a^2(3a) - (ab)(3a) + b^2(3a) = 3a^3 - 3a^2b + 3ab^2.$

3. $(7x^2 + \frac{3}{4}ax - 0{,}3)(2{,}1a^2x) = (7x^2)(2{,}1a^2x) + \left(\frac{3}{4}ax\right)(2{,}1a^2x) - 0{,}3\,(2{,}1a^2x) = 14{,}7a^2x^3 + 1{,}575a^3x^2 - 0{,}63a^2x.$

4. $2a\,(3a - 4ax + \frac{1}{2}x^2) = 6a^2 - 8a^2x + ax^2.$

48. Πολαπλαςιαζμος πολιονίμυ επι πολιόνιμο.

Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να πολαπλαςιάςυμε το πολιόνιμο $a + b - c$ επι το πολιόνιμο $m - n$. Ο πολαπλαςιαζμος αφτος μπορι να παραςτιθι έτςι:

$$(a + b - c)(m - n).$$

Πέρνοντας τον παράγοντα $(m - n)$ ος ένα αριθμο (ος μονόνιμο), εφαρμόζυμε τον κανόνα τυ πολαπλαςιαζμυ πολιονίμυ επι μονόνιμο:

$$(a + b - c)(m - n) = a\,(m - n) + b\,(m - n) - c\,(m - n).$$

Κάθε όρος τυ πολιονίμυ, πυ βρίκαμε, παραςτένι γινόμενο μονονίμυ επι πολιόνιμο. Εφαρμόζοντας κε πάλι τον προιγύμενο κανόνα θάχυμε:

$$(am - an) + (bm - bn) - (cm - cn).$$

Εκςαλίφοντας τις παρενθέςις ςίμφονα με τυς κανόνες τις πρόςθεςις κε τις αφέρεςις, θα βρύμε ςτο τέλος:

$$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn.$$

Κ α ν ό ν α ς. Για να πολαπλαςιάςυμε διο πολιόνιμα, αρκι να πολαπλαςιάςυμε κάθε όρο τυ πρότυ

πολιονίμυ επι όλυς τυς όρυς τυ δέφτερυ πολιονίμυ κε να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα.

Ενοίτε, ότι κατα τον πολαπλαςιαζμο τον όρον τυ πρότυ πολιονίμυ επι τυς όρυς τυ δέφτερυ πρέπι να φιλαχτυν ι κανόνες τον ςιμίον: τα όμια ςιμία δίνυνε το ςιμίο $+$ κε τα αντίθετα, το $-$. Λογυχάρι:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)\,(a^3 - 3ab^2 + b^3).$$

Πολαπλαςιάζυμε πρότα όλυς τυς όρυς τυ πολαπλαςιαςτέυ επι τον πρότο όρο τυ πολαπλαςιαςτι:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)\,a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3.$$

Ιςτερα πολαπλαςιάζυμε όλυς τυς όρυς τυ πολαπλαςιαςτέυ επι το δέφτερο όρο τυ πολαπλαςιαςτι:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)\,(-3ab^2) = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - $$
$$- 3ab^4 + 9ab^2.$$

Αργότερα, πολαπλαςιάζυμε κε επι τον τρίτο όρο τυ πολαπλαςιαςτι:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)\,(+b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3.$$

Τελεφτέα, προςθέτυμε όλα τα εκςαγόμενα, πυ βρίκαμε, κε κάνυμε αναγογι τον όμιον όρον. Το τελικο εκςαγόμενο θάνε:

$$a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3.$$

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α.

1. $(a - b)\,(m - n - p) = am - bm - an + bn - ap + bp.$
2. $(x^2 - y^2)\,(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3.$
3. $(3an + 2n^2 - 4a^2)\,(n^2 - 5an) = 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 -$
$- 15a^2n^2 - 10an^3 + 20a^3n = - 7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^3n.$
4. $(2a^2 - 3)^2 = (2a^2 - 3)\,(2a^2 - 3) = (2a^2)^2 - 3(2a^2) -$
$- (2a^2)3 + 9 = 4a^4 - 6a^2 - 6a^2 + 9 = 4a^4 - 12a^2 + 9.$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

68. $(5a^2b^3)\,(3ab^4c)$. $\qquad \left(\frac{3}{4}\,ax^3\right)\left(\frac{5}{6}\,ax^3\right)$.

69. $(0{,}3abx)\,(2{,}7a^2bx^2)$. $\qquad (7a^2b^4c)\,(3ab^2c^2)\left(\frac{1}{21}\,a^3b\right)$.

70. $\left(\frac{3}{7}\,mx^2y^3\right)^2$. $\qquad (2a^3bx^2)^3$.

71. $(0{,}1xm\,y^3)^2$. $\left(\frac{1}{2}m^2ny^3\right)^3$.

72 $(3a^2 - 2b^3 + c)\,2ab$.

73. $(5a - 4a^2b + 3a^3b^2 - 7a^4b^3)\,5a^2b$.

74. $(a + b - c)\,(m - n)$. $(2a - b)\,(3a + b^2)$.

75. $\left(a + \frac{1}{2}b\right)(2a - b)$. $(x^2 + xy + y^2)\,(x - y)$.

76. $(x^2 - xy + y^2)\,(x + y)$.

77. $(2x + 3y)\,(3x - 2y)$. $(y - 1)\,(y^3 + y^2 + y + 1)$.

49. Διατεταγμένο πολιόνιμο. Λέγοντας, πος ι διάταχςι τον πολιονίμον θα γίνι ανάλογα με τις δινάμις ενος κάπιυ γράματος, ενούμε, πος ι όρι τυ πολιονίμυ θα γραφύνε έτςι, πυ ι εχθέτες τυ γράματος αφτυ να γίνυνε μεγαλίτερι ί μικρότερι απ' τον πρότο όρο ός τον τελεφτέο. Ι διάταχςι λ. χ. τυ πολιονίμυ $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ γένικε ανάλογα με τις α ν ι ύ ς ε ς δ ι ν ά μ ι ς τυ γράματος x. Ι διάταχςι τυ ίδιυ πολιονίμυ θα γίνι ανάλογα με τις κ α τ ι ύ ς ε ς δ ι ν ά μ ι ς τυ γράματος x, αν γράπςυμε τυς όρυς-τυ με τιν αντίςτροφι ςιρα: $-x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Το γράμα, ανάλογα με το οπίο ίνε διατεταγμένο το πολιόνιμο, ονομάζετε κ ί ρ ι ο γράμα-τυ. Ο όρος, πυ έχι το κίριο γράμα με το μεγαλίτερο εχθέτι, ονομάζετε α ν ό τ ε ρ ο ς ό ρ ο ς τυ πολιονίμυ. Ο όρος, εχςάλυ, πυ έχι το κίριο γράμα με το μικρότερο εχθέτι, ί δεν έχι καθόλυ, ονομάζετε **κατότερος όρος** τυ πολιονίμυ.

50. Ο πολαπλαςιαςμος τον διατεταγμένον πολιονίμον ίνε καλίτερο να γίνι έτςι, όπος φένετε ςτο παρακάτο παράδιγμα.

Να πολαπλαςιαςτι το πολιόνιμο:

$$3x - 5 + 7x^2 - x^3 \text{ επι το } 2 - 8x^2 + x.$$

Κάνοντας τι διάταχςι κε τον διο πολιονίμον ανάλογα με τις κατιύςες δινάμις τυ γράματος x, γράφυμε το ένα πολιόνιμο κάτο απ' το άλο κε τραβύμε απο κάτο μια οριζόντια γραμι.

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & -x^3 & +7x^2 & +3x & -5 \\
 & & & -8x^2 & +x & +2. \\
\hline
8x^5 & -56x^4 & -24x^3 & +40x^2 & & \\
 & -x^4 & +7x^3 & +3x^2 & -5x & \\
 & & -2x^3 & +14x^2 & +6x & -10. \\
\hline
8x^5 & -57x^4 & -19x^3 & +57x^2 & +x & -10.
\end{array}$$

Πρότα πολαπλασιάζάμε όλυς τυς όρυς τυ πολαπλασιαστέυ επι τον πρότο όρο τυ πολαπλασιαστι (επι — $8x^2$) κε το γινόμενο, πυ βρίσκυμε, το γράφυμε κάτο απ' τι γραμι. Ιστερα πολαπλασιάζυμε όλυς τυς όρυς τυ πολαπλασιαστέυ επι τον δέφτερο όρο τυ πολαπλασιαστι (επι $+x$) κε το νέο γινόμενο το γράφυμε κάτο απ' το πρότο, έτσι πυ ι όμιι όρι να βρίσκυντε κάτο απ' τυς όμιυς. Κάτο απ' το τελεφτέο γινόμενο τραβύμε μια γραμι, κάτο απ' τιν οπία γράφυμε το τελικο γινόμενο, πυ θα βρύμε, μόλις προσθέσυμε τα μερικα γινόμενα.

Ο πολαπλασιαζμος θα γίνι με τον τρόπο αφτο, πυ ιποδίχσαμε, κι όταν ακόμα ι διάταχσι γίνι ανάλογα με τις ανιύσες δινάμις τυ γράματος.

51. Ανότερος κε κατότερος όρος τυ γινομένυ. Απ' το παράδιγμα, πυ εχσετάσαμε παραπάνο, βγάζυμε τα ακόλυθα σιμπεράζματα:

ο ανότερος όρος τυ γινομένυ ίνε ίσος με το γινόμενο τυ ανότερυ όρυ τυ πολαπλασιαστέυ επι τον ανότερο όρο τυ πολαπλασιαστι.

ο κατότερος όρος τυ γινομένυ ίνε ίσος με το γινόμενο τυ κατότερυ όρυ τυ πολαπλασιαστέυ επι τον κατότερο όρο τυ πολαπλασιαστι.

Επιδι ο εκθέτις τυ κίριυ γράματος όλον τον λιπον όρον τυ γινομένυ θἄνε μικρότερος απ' τον εκθέτι τυ κίριυ γράματος τυ μεγαλίτερυ όρυ κε ταφτόχρονα μεγαλίτερος απ' τον εκθέτι τυ κατότερυ όρυ, γι' αφτο ο ανότερος κι ο κατότερος όρος τυ γινομένυ δεν μπορύνε νἄχυν όμιυς όρυς.

Ι λιπι όρι τυ γινομένυ μπορύνε να προκίπσυν απ' τιν ένοσι πολον όμιον όρον σε ένα. Κάποτε μάλιστα τιχένι να χαθύνε κι όλι ι λιπι όρι, εκσον απ' τον ανότερο κε τον κατότερο, ίστερα απ' τιν αναγογι τον όμιον όρον, όπος φένετε στο ακόλυθο παράδιγμα.

$$\begin{array}{r}
x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
x - a \\
\hline
x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 - a^4x \\
- ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad - a^5 = x^5 - a^5.
\end{array}$$

52. Αριθμος τον όρον τυ γινομένυ. Ας ιποθέσυμε, πος ο πολαπλασιαστέος έχι 5 όρυς κι ο πολαπλασιαστις 3 όρυς. Πολαπλασιάζοντας κάθε όρο τυ πολαπλασιαστέυ επι τον πρότο όρο τυ πολαπλασιαστι, θἄχυμε 5 όρυς στο γινόμενο. Πολαπλασιάζοντας

ίςτερα κάθε όρο τυ πολαπλαςιαςτέυ επι το δέφτερο όρο τυ πολαπλαςιαςτι, θάχυμε πάλι 5 όρυς ςτο γινόμενο κ.τ.λ. Επομένος, όλι ι όρι τυ γινομένυ θάνε $5 \cdot 3$, διλ. 15. Γενικα, **ο αριθμος τον όρον τυ γινομένυ, πριν να γίνι ι αναγογι τον όμιον όρον, ίνε ίςος με το γινόμενο τυ αριθμυ τον όρον τυ πολαπλαςιαςτέυ επι τον αριθμο τον όρον τυ πολαπλαςιαςτι.**

Επιδι ο ανότερος κι ο κατότερος ορος τυ γινομένυ δεν μπορύνε νάχυνε όμιυς όρυς κι όλι ι λιπι όρι μπορύνε να χαθυν ίςτερα απ' τιν αναγογι τον όμιον όρον, γι' αφτο **ο αριθμος τον όρον τυ γινομένυ ίςτερα απ' τιν αναγογι τον όμιον όρον δεν μπορι νάνε μικρότερος απ' τυς διο.**

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Να πολαπλαςιαςτύνε τα παρακάτο πολιόνιμα, αφυ γίνι πρότα ι διάταξί-τυς ανάλογα με τις κατιύςες δινάμις τυ γράματος x.

78. $24x + 6x^2 + x^3 + 60$ κε $12x - 6x^2 + 12 + x^3$.

79. $(x^5 - x^3 + x - 1)\,(x^4 + x^2 - 1)$.

80. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)\,(x + a)$.

53. Μερικι τίπι πολαπλαςιαςμυ τον διονίμον. Ινε καλο να θιμόςαςτε τυς ακόλυθυς τίπυς τυ πολαπλαςιαςμυ τον διονίμον:

α) $\underline{(a + b)^2} = (a + b)\,(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$

$$= \underline{a^2 + 2ab + b^2}.$$

Λ.χ:

$$17^2 = (10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289.$$

Επομένος, **το τετράγονο τυ αθρίςματος διο οπιονδίποτε αριθμον, ίνε ίςο με το τετράγονο τυ πρότυ αριθμυ ςιν το διπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ αριθμυ επι το δέφτερο ςιν το τετράγονο τυ δέφτερυ.**

β) $\underline{(a - b)^2} = (a - b)\,(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 =$

$$= \underline{a^2 - 2ab + b^2}.$$

Λ. χ:

$$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361.$$

Επομένος, **το τετράγονο τις διαφορας διο αριθμον, ίνε ίςο με το τετράγονο τυ πρότυ αριθμυ, πλιν το διπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ αριθμυ επι το δέφτερο ςιν το τετράγονο τυ δέφτερυ.**

γ) Επιδι τι διαφορα διο αριθμον κε γενικα τον αλγεβρικον παραςτάςεον μπορύμε να τιν παραςτίςυμε ος αλγεβρικο άθριζμα, γι' αφτο ίνε δινατο τυς διο προιγύμενυς κανόνες να τυς ενόςυμε ς' ένα μονάχα, τον ακόλυθο:

Το τετράγονο ενος διονίμυ ίνε ίςο με το τετράγονο τυ πρότυ όρυ ςιν το διπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ όρυ επι το δέφτερο ςιν το τετράγονο τυ δέφτερυ όρυ.

Πρέπι μονάχα να θιμιθύμε, πος πρέπι κάθε όρο τυ διονίμυ, πυ ιπςόνετε ςτο τετράγονο, να τον πάρυμε με το ςιμίο-τυ.

Δ. χ:

1. $(2ab - c^2)^2 = (2ab)^2 + 2\,(2ab)\,(-c^2) + (-c^2)^2 =$
$= 4a^2b^2 - 4abc^2 + c^4.$

2. $(-m + 3n^3)^2 = (-m)^2 + 2\,(-m)\,(3n^3) + (3n^3)^2 = m^4 -$
$- 6mn^3 + 9n^6.$

δ) $\underline{(a+b)\,(a-b)} = a^2 + ab - ab - b^2 = \underline{a^2 - b^2}.$

Δ. χ:

$25 \cdot 15 = (20+5) \cdot (20-5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375$

Επομένος, **το γινόμενο τυ αθρίζματος διο αριθμον επι τι διαφορά-τυς, ίνε ίςο με τι διαφορα τον τετραγόνον τον αριθμον αφτον.**

54. Εφαρμογες. Με τι βοίθια τον παραπάνο τίπον ο πολαπλαςιαζμος τον πολιονίμον γίνετε απλύςτερα, παρα με το ςινιθιζμένο τρόπο.

Παραδίγματα.

1. $(4a^3 - 1)^2 = (4a^3)^2 - 2(4a^3) \cdot 1 + 1^2 = 16a^6 - 8a^3 + 1.$

2. $(x+y)\,(y-x) = (y+x)\,(y-x) = y^2 - x^2.$

3. $(x+y+1)\,(x-y+1) = [(x+1)+y]\,[(x+1)-y] =$
$= (x+1)^2 - y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2.$

4. $(a-b+c)\,(a+b-c) = [a-(b-c)]\,[a+(b-c)] =$
$= a^2 - (b-c)^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2.$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

81. $(a+1)^2$. $\quad (1+2a)$ $\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)$.

82. $(3a^2+1)^2$· $\quad (0{,}1mx+5x^2)^2$.

83. $(5a-2)^2$· $\quad (3x-2a)^2$· $\quad \left(3a^2-\frac{1}{2}\right)$.

84. Με τι βοίθια τον τίπον $(a+b)^2$ κε $(a-b)^2$ βρέςτε τα ακόλυθα τετράγονα: 101^2, 997^2, 96^2, 57^2, 72^2, 89^2.

85. $(2m-3n)^2$· $\quad (3a^2x-4ay)$· $\quad \left[0{,}2x^3-\frac{3}{8}\right]^2$·

86. $\left(\frac{1}{2}x^2-3\frac{1}{2}x\right)^2$· $\quad (0{,}25p-0{,}2q)^2$.

87. $(a+1)(a-1)$· $\quad (2a+5)(2a-5)$.

88. $(2x-3)(3+2x)$. $\quad (a^2+1)(1-a)^2$.

Να βρεθύνε με το ςιντομότερο τρόπο τα ακόλυθα γινόμενα.

89. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$· $\quad (4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$.

90. $(m+n-p)(m+n+p)$· $\quad [a+(b+c)][a-(b+c)]$.

55. Κίβος τυ αθρίζματος κε κίβος τις διαφορας διο αριθμον. Στυς τίπυς τυ πολαπλαςιαζμυ τον διονίμον ας προςθέςυμε κε τυς ακόλυθυς διο:

α) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$

διλ. **ο κίβος τυ αθρίζματος διο αριθμον ίνε ίςος με τον κίβο τυ πρότυ αριθμυ ςιν το τριπλάςιο γινόμενο τυ τετραγόνυ τυ πρότυ αριθμυ επι τον δέφτερο ςιν το τριπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ επι το τετράγονο τυ δέφτερυ ςιν τον κίβο τυ δέφτερυ αριθμυ.**

Λ. χ:

$11^3=(10+1)^3=10^3+3\cdot 10^2\cdot 1+3\cdot 10\cdot 1^2+1^3=$
$=1000+300+30+1=1331.$

β) $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$=a^3-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

διλ. **ο κίβος τις διαφορας διο αριθμον ίνε ίςος με τον κίβο τυ πρότυ αριθμυ πλιν το τριπλάςιο γινόμενο τυ τετραγόνυ τυ πρότυ αριθμυ επι τον δέφτερο.**

ςιν το τριπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ αριθμυ επι το τετράγονο τυ δέφτερυ πλιν τον κίβο τυ δέφτερυ αριθμυ.

Λ. χ:

$$29^3 = (30 - 1)^3 = 30^3 - 3 \cdot 30^2 \cdot 1 + 3 \cdot 30 \cdot 1^2 - 1^3 =$$
$$= 27\,000 - 2700 + 90 - 1 = 24\,389.$$

Τυς προιγύμενυς διο κανόνες μπορύμε να ενόςυμε ςε ένα, αν πάρυμε τυς όρυς τυ διονίμυ, πυ ιπςόνετε ςτον κίβο, μαζι με τα ςιμία-τυς.

Ο κίβος τυ διονίμυ ίνε ίςος με τον κίβο τυ πρότυ όρυ ςιν το τριπλάςιο γινόμενο τυ τετραγόνυ τυ πρότυ όρυ επι το δέφτερο ςιν το τριπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ όρυ επι το τετράγονο τυ δέφτερυ ςιν τον κίβο τυ δέφτερυ όρυ.

Λ. χ:

$$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(-3b) + 3(2a)(-3b)^2 + (-3b)^3 =$$
$$= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

91. $(a+1)^3$. $(a-1)^3$. $(2x+3)^3$. $(5+3x)^3$.

92. $\left(\frac{1}{2}m - 2\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}p - \frac{1}{3}q\right)^3$, $(5 - 3x)^3$.

IV'. ΑΛΓΕΒΡΙΚΙ ΔΙΕΡΕΣΙ.

56. Διέρεςι μονονίμον. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να κάνυμε τι διέρεςι:

$$a^5 : a^2.$$

Επιδι ο διερετέος πρέπι νἄνε ίςος με το γινόμενο τυ διερέτι επι το πιλίκο, κ' επιδι εκςάλυ, κατα τον πολαπλαςιαςμο ι εκθέτες τον ίδιον γραμάτον προςθέτυντε, γι' αφτο ο εκθέτις τυ γράματος a ςτο ζιτύμενο πιλίκο πρέπι νἄνε τέτιος αριθμος, πυ προςτιθέμενος με το 2 να δόςι το 5. Τέτιος αριθμος θἄνε ίςος με τι διαφορα $5 - 2$.

Επομένος:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

Με τον ίδιο πάλι τρόπο βρίςχυμε:

$$x^3 : x^2 = x, \qquad y^4 : y = y^3 \text{ κ.τ.π.}$$

Επομένος, το πιλίχο διο δινάμεον ενος χε τυ ίδιυ αριθμυ ίνε δίναμι τυ ίδιυ αριθμυ, πυ έχι εχθέτι τι διαφορα τον εχθετόν τυ διερετέυ χε τυ διερέτι. Αφτο ςιντομότερα το διατιπόνυν έτςι: **όταν θέλυνε να διερέςυνε δινάμις ενος κε τυ ίδιυ αριθμυ, αφερύνε τον εκθέτι τυ διερέτι απ' τον εκθέτι τυ διερετέυ.**

β) Ας ιποθέςυμε, πος πρέπι να γίνι ι διέρεςι:

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Σίμφονα με τον οριςμο τις διέρεςις, το πιλίχο, πολαπλαςιαζόμενο επι το διερέτι, πρέπι να δόςι το διερετέο. Για το λόγο αφτο το ζιτύμενο πιλίχο πρέπι νάχι ςιντελεςτι 12 : 4, διλ. 3. Ο εχθέτις τυ γράματος a θα βρεθι, αν απ' τον εχθέτι τυ γράματος αφτυ τυ διερετέυ, αφερέςυμε τον εχθέτι τυ ίδιυ γράματος τυ διερέτι. Το γράμα b, επιδι έχι τον ίδιο εχθέτι χε ςτα διο μονόνιμα, δε θα περιέχετε ςτο πιλίχο. Το γράμα x, πυ δεν ιπάρχι ςτο διερέτι, γράφετε ςτο πιλίχο μαζι με τον εχθέτι-τυ.

Επομένος: $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax.$

Δ ο κ ι μ ι : $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x.$

Κανόνας. Για να διερέςυμε ένα μονόνιμο με άλο, διερύμε το ςιντελεςτι τυ διερετέυ με το ςιντελεςτι τυ διερέτι κι αφερύμε απ' τον εκθέτι κάθε γράματος τυ διερετέυ τον εκθέτι τυ ίδιυ γράματος τυ διερέτι. Τα γράματα τυ διερετέυ, πυ δεν ιπάρχυνε ςτο διερέτι, μεταφέροντε ςτυ πιλίκο μαζι με τον εκθέτι-τυς.

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α :

1. $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^3.$

2. $-ax^4y^3 : \left(-\frac{5}{6}axy^2\right) = +\frac{6}{5}x^3y.$

3. $0{,}8axn : (-0{,}02ax) = -40xn^{-1}.$

57. **Δίναμι με εκθέτι μιδενικο.** Αν ο εχθέτις τυ διερετέυ ίνε ίςος με τον εχθέτι τυ διερέτι, τότε το πιλίχο θάνε ίςο με το 1. Δ.χ., $a^3 : a^3 = 1$, επιδι $a^3 = a^3 \cdot 1$. Αν χάνυμε τι διέρεςι με τον ίδιό τρόπο, όπος χε παραπάνο, αφερόντας διλ. τυς

εκθέτες, τότε θάχυμε ςαν πιλίκο γράμα με εκθέτι μιδενικό: $v^8 : a^8 = a^{3-3} = a^0$. Στιν περίπτοσι αφτι, δε μπορύμε βέβεα να δόςυμε στον εκθέτι τι ςιμαςία πυ το δίναμε πριν, επιδι δεν ίνε δινατο να επαναλάβυμε κανένα αριθμο 0 φορες επι τον εαφτό-τυ. Το ςίμβολο a^0 χριςιμέβι μονάχα να μας δίχςι το πιλίκο τις διέρεςις τον ίδιον δινάμεον τυ γράματος a. Επιδι όμος το πιλίκο αφτο ίνε ίςο με το 1, γι' αφτο το a^0 θα το πάρυμε πάντα ίςο με το 1.

58. Σιμία αδιερετότιτας τον μονονίμον. Αν το πιλίκο τις διέρεςις τον ακέρεον μονονίμον δε μπορι να παραςτιθι με ακέρεο μονόνιμο, τότε λένε, πος τέτια διέρεςι ίνε αδίνατι. Ι διέρεςι τον μονονίμον ίνε αδίνατι ςτις ακόλυθες διο περιπτόςις:

α) Οταν ο διερέτις έχι γράματα, πυ δεν ιπάρχυνε ςτο διερετέο. Δεν μπορύμε λ. χ. να διερέςυμε το $4ab^2$, με το $2ax$, επιδι κάθε ακέρεο μονόνιμο πολαπλαςιαζόμενο επι το $2ax$, θα δόςι γινόμενο, πυ θα περιέχι το x, τι ςτιγμι, πυ ςτο διερετέο ένα τέτιο γράμα δε βρίςκετε.

β) Οταν ο εκθέτις ενος κάπιυ γράματος τυ διερέτι ίνε μεγαλίτερος απ' τον εκθέτι τυ ίδιυ γράματος τυ διερετέυ. Ι διέρεςι λ.χ. $10a^3b^2 : 5ab^3$ ίνε αδίνατι, επιδι οπιοδίποτε ακέρεο μονόνιμο κε να γράφαμε ςτο πιλίκο, πολαπλαςιαζόμενο το μονόνιμο αφτο επι το διερέτι θάδινε γινόμενο μονόνιμο, πυ θα περιέχε το γράμα b με εκθέτι όχι μικρότερο απ' το 3, τι ςτιγμι πυ το γράμα αφτο περιέχατε ςτο διερετέο με εκθέτι 2.

Οταν ένα μονόνιμο δε διερίτε μ' ένα άλο, τότε το πιλίκο μπορι μονάχα να παραςτιθι με τι βοίθια τον ςιμίον τις διέρεςις. Το πιλίκο λ.χ. τις διέρεςις $4a$ δια $5b$ μπορι να γραφτι έτςι:

$$4a:5b, \text{ ι } \frac{4a}{5b}.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

93. $8a^6x^3y : 4a^3x^2$, $\qquad 3ax^3 : (-5ax)$.

94. $a^8b : \left(-\frac{5}{6}a^6b\right)$. $\qquad 12amb^3 : 4ab$.

59. Διέρεςι πολιονίμυ δια μονονίμυ. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να διερέςυμε το πολιόνιμο $a + b - c$ δια το μονόνιμο m:

$$(a+b-c):m, \text{ ι } \frac{a+b-c}{m}.$$

Το πολιόνιμο $a+b-c$ ίνε αλγεβρικο άθριζμα. Για να διερεθι όμος αλγεβρικο άθριζμα μ' ένα οπιοδίποτε αριθμο, μπορύμε, όπος μάθαμε, να διερέςυμε δια τυ αριθμυ αφτυ κάθε προςθετέο χοριςτα. Γι' αφτο:

$$\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}.$$

Οτι ένα τέτιο πράμα ίνε ςοςτο, μπορύμε να βεβεοθόμε με δοκιμι. Πολαπλαςιάζοντας για το ςκοπο αφτο το πολιόνιμο $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ επι το διερέτι m, θα βρύμε το διερετέο $a+b-c$.

Κανόνας. Για να διερέςυμε πολιόνιμο με μονόνιμο, αρκι να διερέςυμε κάθε όρο-τυ με το μονόνιμο κε να προςθέςυμε τα εκςαγόμενα.

Παραδίγματα:

1. $(20a^3-8a^2-a):4a=5a^2-2a-\frac{1}{4}.$

2. $(4x^2-2x+10):2x=2x-1+\frac{10}{2x}.$

3. $\left(\frac{1}{2}x^3-0{,}3x^2+1\right):2x^2=\frac{1}{4}x-0{,}15+\frac{1}{2x^2}.$

60. Διέρεςι μονονίμυ δια πολιονίμυ. Ας ιποθέςυμε πος θέλυμε να διερέςυμε το μονόνιμο a με το πολιόνιμο $b+c-d$. Το πιλίκο μιας τέτιας διέρεςις δε μπορι να παραςτιθι ύτε με ακέρεο μονόνιμο, ύτε με ακέρεο πολιόνιμο. Ας ιποθέςυμε λ.χ., πος το πιλίκο θάτανε ίςο μ' ένα οπιοδίποτε ακέρεο μονόνιμο ί ακέρεο πολιόνιμο, τότε θάπρεπε το γινόμενο τυ πιλίκυ αφτυ επι το πολιόνιμο $b+c-d$ νάτανε κι αφτο πολιόνιμο κι όχι μονόνιμο Το πιλίκο τις διέρεςις τυ a δια τυ $b+c-d$ μπορι να παραςτιθι μονάχα με τα ςιμία τις διέρεςις:

$$a:(b+c-d), \text{ ι } \frac{a}{b+c-d}.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

95. $(4a^2b + 6ab^2 - 12a^3b^5) : \frac{3}{4}ab.$

96. $(36a^2x^5 - 24a^3x^4 + 4a^4x^3) : 4a^2x^3.$

97. $(3a^2y - 6a^2y^2 + 3a^2y^3 - 3a^2y^4) : 3a^2y.$

61. Διέρεςι πολιονίμυ δια πολιονίμυ. Το πιλίκο τις διέρεςις πολιονίμυ δια πολιονίμυ μονάχα ςε ςπάνιες περιπτόςις μπορι να παραςταθι με μορφι ακέρευ πολιονίμυ. Λ.χ:

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = (a + b),$$

επιδι ίνε

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Πιλίκα όμος ςαν το παρακάτο, μπορύνε να παραςτιθύνε μονάχα με το ςιμίο τις διέρεςις. Λ.χ. το πιλίκο τις διέρεςις $a - b + c$ δια $d - e$ θα παραςτιθι έτςι:

$$\frac{a - b + c}{d - e}, \text{ ί } (a - b + c) : (d - e).$$

62. Διέρεςι διατεταγμένον πολιονίμον. Το πιλίκο ίνε κάποτε δινατο να παραςτιθι με μορφι ακέρευ πολιονίμυ, όταν ι διάταξι κε τον διο πολιονίμον γίνετε ανάλογα με τις δινάμις ενος κε τυ ίδιυ γράματος. Ας δίξυμε τόρα με παράδιγμα, πός γίνετε ένα τέτιο πράμα. Εχυμε, λ.χ., να διερέςυμε:

$$(5x^2 - 19x^3 + 17x + 6x^4 - 4) : (1 - 5x + 3x^2).$$

Γράφυμε για το ςκοπο αφτο κε τα διο πολιόνιμα ανάλογα με τις κατιύςες δινάμις τυ γράματος x κε κάνυμε τι διάταξι τις πράξις έτςι, όπος γίνετε κε κατα τι διέρεςι τον ακέρεον αριθμον:

$$\begin{array}{l r|l}
 & 6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4 & 3x^2 - 5x + 1 \\
 & -6x^4 + 10x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \overline{2x^2 - 3x - 4} \\
\text{1-ο κατάλιπο} \ldots & -9x^3 + 3x^2 + 17x - 4 & \\
 & +9x^3 - 15x^2 + 3x \qquad & \\
\text{2-ο κατάλιπο} \ldots & -12x^2 + 20x - 4 & \\
 & +12x^2 - 20x + 4 & \\
\text{3-ο κατάλιπο} \ldots & 0 &
\end{array}$$

Ας ιποθέςυμε, πος το ζιτύμενο πιλίκο ίνε ίςο μ' ένα οπιοδίποτε πολιόνιμο κε πος ι όρι τυ πολιονίμυ αφτυ ίνε κι αφτι διατεταγμένι ανάλογα με τις κατιύςες δινάμις τυ γράματος x.

Ο διερετέος πρέπι νάνε ίςος μὲ το γινόμενο τυ διερέτι επι το πιλίχο. Απ' τον πολαπλασιαζμο τον διατεταγμένον πολιονίμον, μας ίνε γνοςτο, πος ο ανότερος όρος τυ γινομένυ ίνε ίςος με το γινόμενο τυ ανότερυ όρυ τυ πολαπλαςιαςτέυ επι τον ανότερο όρο τυ πολαπλαςιαςτι. Στο παράδιγμα, πυ φέραμε, ο ανότερος όρος ίνε ο πρότος ςτο διερετέο, ςτο διερέτι κε ςτο πιλίχο. Διλαδι, ο 1-ος όρος τυ διερετέυ ($6x^4$) πρέπι νάνε ίςος με το γινόμενο τυ πρότυ όρυ τυ διερέτι ($3x^2$) επι τον πρότο όρο τυ πιλίχυ. Επομένος, για να βρύμε τον πρότο όρο τυ πιλίχυ, αρχι να διερέςυμε τον 1-ο όρο τυ διερετέυ με τον 1-ο όρο τυ διερέτι. Κάνοντας τι διέρεςι αφτι, βρίςκυμε τον πρότο όρο τυ πιλίχυ $2x^2$, πυ τον γράφυμε κάτο απ' τιν γραμι ςτο πιλίχο.

Πολαπλαςιάζυμε ίςτερα όλυς τυς όρυς τυ διερέτι επι τον πρότο όρο τυ πιλίχυ κι αφερύμε το γινόμενο απ' το διερετέο. Για να γίνι εφχολότερα ι αφέρεςι αφτι, γράφυμε κάτο απ' τυς αντίςτιχυς όρυς τυ διερετέυ τα μερικα γινόμενα κάθε όρυ τυ διερέτι επι τον 1-ο όρο τυ πιλίχυ, αλάζοντας τα ςιμία-τυς κε κάνοντας αναγογι τον όμιον όρον. Θάχυμε έτςι το 1-ο κατάλιπο. Σε περίπτοςι, πυ το κατάλιπο ίνε 0, ςιμπερένυμε, πος ςτο πιλίχο εκςον απ' τον όρο, πυ βρίκαμε, δεν περιέχετε κανένας άλος, ίνε διλ. το πιλίχο μονόνιμο. Αν όμος το πρότο κατάλιπο, όπος ςιμβένι ςτο παράδιγμάμας δεν ίνε 0, τότε ςκεφτόμαςτε έτςι:

Ο διερετέος ίνε γινόμενο όλον τον όρον τυ διερέτι επι κάθε όρο τυ πιλίχυ. Ος τα τόρα εμις αφερέςαμε απ' το διερετέο μονάχα το γινόμενο όλον τον όρον τυ διερέτι επι τον πρότο όρο τυ πιλίχυ. Επομένος, ςτο πρότο κατάλιπο περιέχετε το γινόμενο όλον τον όρον τυ διερέτι επι το 2-ο, επι τον 3-ο κι όλυς τυς άλυς όρυς τυ πιλίχυ. Ο ανότερος όρος τυ κατάλιπυ ίνε ο 1-ος. Ο ανότερος όρος τυ διερέτι ίνε επίςις ο 1-ος. Ο ανότετος όρος τυ πιλίχυ (αν δεν πάρυμε ιπόψι τον 1-ο) ίνε ο 2-ος όρος. Επομένος, ο πρότος όρος τυ καταλίπυ ($-9x^3$) πρέπι νάνε ίςος με το γινόμενο τυ 1-υ όρυ τυ διερέτι επι το 2-ο όρο τυ πιλίχυ. Απ' αφτο ςιμπερένυμε: Για να βρεθι ο 2-ος όρος τυ πιλίχυ, αρχι να διερεθι ο 1-ος όρος τυ πρότυ κατάλιπυ με τον 1-ο όρο τυ διερέτι. Κάνοντας τι διέρεςι βρίςκυμε το 2-ο όρο τυ πιλίχυ $-3x$, πυ τον γράφυμε κι αφτον ςτο πιλίχο.

Πολαπλαςιάζυμε τόρα όλυς τυς όρυς τυ διερέτι επι το 2-ο όρο τυ πιλίχυ κε αφερύμε το γινόμενο, πυ βρίςκυμε, απ' το 1-ο κατάλιπο. Θάχυμε έτςι το 2-ο κατάλιπο. Αν το κατάλιπο αφτο θάνε ίςο με το 0, αφτο, ςιμένι, πος ι διέρεςι τέλιοςε. Αν όμος, όπος κε ςτο παράδιγμά-μας, το 2-ο κατάλιπο δεν ίνε ίςο με το 0 τότε θα ςκεφτύμε έτςι:

Το 2-ο κατάλιπο ίνε γινόμενο όλον τον όρον τυ διερέτι επι τον 3-ο, επι τον 4-ο κε τυς άλυς όρυς τυ πιλίχυ. Επιδι όμος απ' τυς όρυς αφτυς τυ πιλίχυ ο ανότερος ίνε 3-ος, γι' αφτο σίμφονα με τα παραπάνο πυ ίπαμε, τον 3-ο όρο τυ πιλίχυ θα βρύμε, αν διερέσυμε τον 1-ο όρο τυ 2-υ κατάλιπυ με τον 1-ο όρο τυ διερέτι. Κάνοντας τι διέρεσι, βρίσκυμε — 4. Πολαπλασιάζοντας όλυς τυς όρυς τυ διερέτι επι το — 4 κι αφερόντας το γινόμενο απ' το κατάλιπο, θάχυμε το 3-ο κατάλιπο. Στο παράδιγμά-μας το κατάλιπο αφτο ίνε μιδενικο. Αφτο φανερόνι, πος το πιλίκο δεν περιέχι άλυς όρυς εκσον απο κίνυς, πυ βρίκαμε. Αν το 3-ο κατάλιπο δε θάτανε 0, τότε θάπρεπε να διερέσυμε τον 1-ο όρο τυ κατάλιπυ αφτυ με τον 1-ο όρο τυ διερέτι. Θα βρίσκαμε έτσι τον 4-ο όρο τυ πιλίχυ. Ι πράκσι θα σινεχιστι με τον ίδιο τρόπο, όσπυ να βρύμε κατάλιπο 0 (αν ο διερετέος ίνε διερετος με το διερέτι).

Ι διάτακσι τον πολιονίμον μπορύσε να γίνι κε με τις ανιύσες δινάμις ενος κε τυ ίδιυ γράματος τυ διερετέυ κε τυ διερέτι. Ι εργασία κε στιν περίπτοσι αφτι θα γινότανε με τον τρόπο, πυ ιποδίκσαμε παραπάνο. Τι φορα όμος αφτι, έπρεπε νάχυμε ιπόπσι, πος ο κατότερος όρος τυ γινόμενυ ίνε ίσος με το γινόμενο τυ κατότερυ όρυ τυ πολαπλασιαστέυ επι τον κατότερο όρο τυ πολαπλασιαστι.

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α:

α)
$$\begin{array}{l|l} 28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\ \quad\;\; - 8ax^3 + 20a^2x^2 & \overline{4x^2 - 3ax} \\ \hline \quad\;\; - 21ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x & \\ \quad\quad\quad\quad\;\; + 6a^2x^2 - 15a^3x & \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

Δε γράπσαμε, όπος βλέπετε, τα γινόμενα τυ 1-υ όρυ τυ διερέτι επι τον 1-ο, επι το 2-ο κ.τ.λ. όρυς τυ πιλίχυ, εκσετίας, πυ τα γινόμενα αφτα ίνε πάντοτε ίσα με κίνυς τυς όρυς, κάτο απ' τυς οπίυς γράφυντε, κ' εκσάλυ, επιδι κατα τιν αφέρεσι χάνυντε. Ετσι κάνυνε λιγνα.

β)
$$\begin{array}{l|l} x^3 - a^3 & x - a \\ \;\;\text{,,} + ax^2 & \overline{x^2 + ax + a^2} \\ \hline ax^2 - a^3 & \\ \;\;\text{,,} + a^2x & \\ \hline a^2x - a^3 & \\ \;\;\text{,,} + a^3 & \\ \hline \;\;0 & \end{array}$$

γ) $x^4 - a^4 \quad | \; x - a$

$\underline{\;\text{„} - ax^3} \quad | \; x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$

$ax^3 - a^4$

$\underline{\;\text{„} + a^2x^2}$

$a^2x^2 - a^4$

$\underline{\;\text{„} + a^3x}$

$a^3x - a^4$

$\underline{\;\text{„} + a^4}$

0

Με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο μπορύμε να βεβεοθύμε, πος ι διαφορες $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$... κε γενικα $x^m - a^m$ διερύντε χορις ν' αφίςυνε κατάλιπο με τι διαφορα $x - a$, διλ. ότι **ι διαφορα τον ίδιον δινάμεον διο αριθμον διερίτε με τι διαφορα τον αριθμον αφτον χορις ν' αφίςι κατάλιπο.**

63. Σιμία αδιερετότιτας τον πολιονίμον. Ι διέρεςι πολιονίμυ δια πολιονίμυ δεν ίνε δινατι στις ακόλυθες περιπτόςις:

α) **Οταν ο εκθέτις τυ κίριυ γράματος τυ ανότερυ όρυ τυ διερετέυ, ίνε μικρότερος απ' τον εκθέτι τυ ίδιυ γράματος τυ ανότερυ όρυ τυ διερέτι.** Αφτο ςιμβένι επιδι ςτιν περίπτοςι αφτι, δεν ίνε δινατο να βρύμε τον ανότερο όρο τυ πιλίκυ.

β) **Οταν ο εκθέτις τυ κίριυ γράματος τυ κατότερυ όρυ τυ διερετέυ ίνε μικρότερος απ' τον εκθέτι τυ ίδιυ γράματος τυ κατότερυ όρυ τυ διερέτι.** Αφτο ςιμβένι, επιδι ςε τέτια περίπτοςι δεν ίνε δινατο να βρύμε τον κατότερο όρο τυ πιλίκυ.

γ) Αν ι εκθέτες τυ κίριυ γράματος τον ανότερον κε τον κατότερον όρον τυ διερετέυ δεν ίνε μικρότερι απ' τυς αντίςτιχυς εκθέτες τυ ίδιυ γράματος τον ανότερον κε τον κατότερον όρον τυ διερέτι, δεν μπορύμε πάλι νάμαςτε βέβει, πος ι διέρεςι ίνε δινατι. Σε τέτια περίπτοςι για να βεβεοθύμε, αν ίνε δινατι ίτε αδίνατι ι διέρεςι, πρέπι να κάνυμε τιν πράκςι κε να τι ςινεχίςυμε, όςπυ να εκςακριβοθι τελιοτικα, αν ίνε δινατο ί αδίνατο νάχυμε πιλίκο με μορφι πολιονίμυ.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

98. $(x^2 - 3x - 4) : (x + 1)$, $\quad$ **$(y^2 - y - 2) : (y - 2)$.**

99. $(6x^3 + 2 - 3x^2 - 4x) : (2x - 1)$.

100. $(3ax^6 - 15a^2x^4 + 6a^3x^3) : (x^2 - 5ax + 2a^2)$.

101. $(x^6 - a^6) : (x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5)$.

V. Ανάλιςι ςε γινόμενο παραγόντον.

64. Προκαταρχτικι ςιμίοςι. Μιλόντας για τιν αλγεβρικι διέρεςι, αναφέραμε, πος ςε μερικες περιπτόςις το πιλίκο μπορι να παραςτιθι μονάχα με το ςιμίο τις διέρεςις. Ι παραςτάςις:

$$\frac{a}{b},\ \frac{2x}{3a},\qquad \frac{x^2 - 4x + y^2}{x + y}\ \text{κ. τ. λ.},$$

πυ θἄχυμε ςε παρόμιες περιπτόςις, ονομάζυντε *αλγεβρικα κλάζματα*.

Τα αλγεβρικα κλάζματα, όπος κε τα αριθμιτικα, μπορύνε κάποτε ν' απλοπιιθύν. Για το ςκοπο αφτο διερύμε το διερετέο κε το διερέτι με τυς κινύς-τυς παράγοντες, αν, ενοίτε, έχυνε τέτιυς. Για νἄνε δινατο να γίνι παρόμια απλοπίιςι χορις διςκολίες, πρέπι να μάθυμε ν' αναλίςυμε τις αλγεβρικες παραςτάςις ςε γινόμενο παραγόντον (με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο, όπος κε ςτιν αριθμιτικι μαθέναμε ν' αναλίςυμε τυς ακέρευς αριθμυς ςε γινόμενο παραγόντον, για να μπορέςυμε να τυς απλοπιίςυμε).

65. Ανάλιςι ακέρεον μονονίμον. Ας πάρυμε ένα οπιοδίποτε ακέρεο μονόνιμο, λ.χ. το $6a^2b^3$. Επιδι το μονόνιμο αφτο παραςτένι γινόμενο, ίνε δινατο να τ' αναλίςυμε αμέςος ςτυς παράγοντες, απ' τυς οπίυς αποτελιέτε. Θἄχυμε λιπον:

$$6a^2b^3 = 2 \cdot 3(aa)(bbb) = 2 \cdot 3aabbb.$$

Ενόνοντας ς' οπιεςδίποτε ομάδες τυς παράγοντες αφτυς (εφαρμόζοντας τι ςινδιαςτικι ιδιότιτα τυ πολαπλαςιαςμυ), θἄνε δινατο για το μονόνιμο αφτο να ιποδίχςυμε διάφορα ίδι ανάλιςις, ςαν τα παρακάτο:

$$6a^2b^3 = (6a)\,(ab^3) = (2a^2b)\,(3b^2) = (3ab^2)\,(2ab)\ \text{κ.τ.λ.}$$

66. Ανάλιςι πολιονίμον. Ας φέρυμε απλύςτερες περιπτόςις, κατα τις οπίες το πολιόνιμο μπορι να τραπι ςε γινόμενο παραγόντον:

α) Επιδι

$$(a + b - c)\,m = am + bm - cm,$$

γι' αφτο θἄνε ςοςτο κε τυναντίο:

$$am + bm - cm = (a + b - c)\,m.$$

Επομένος, **αν όλι ι όρι τυ πολιονίμυ έχυν κινο παράγοντα, μπορύμε να τον βγάλυμε όκσο απ' τις παρενθέσις.**

Λ.χ:

1. $x^6 - 2x^2 + 3x = x(x^5 - 2x + 3)$.
2. $16a^2 - 4a^3 = 4a^2(4 - a)$.
3. $5m(x - 1) + 3n(x - 1) = (x - 1)(5m + 3n)$.

β) Επιδι ίνε

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

γι' αφτο θάνε κε τυναντίο σοστο:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Επομένος, **αν ένα διόνιμο ίνε διαφορα τετραγόνον, μπορι να αντικατασταθι με το γινόμενο τυ αθρίσματος τον αριθμον αφτον επι τι διαφορά-τυς.**

Λ.χ.

1. $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$.
2. $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1)$.
3. $9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right)$.
4. $25x^2 - 0{,}01 = (5x)^2 - 0{,}1^2 = (5x + 0{,}1)(5x - 0{,}1)$.
5. $m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$
   $= (m^2 + n^2)(m + n)(m - n)$.
6. $x^2 - (x - 1)^2 = [x + (x - 1)][x - (x - 1)] =$
   $= (x + x - 1)(x - x + 1) = 2x - 1$.

γ) Επιδι ίνε

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ κε } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

γι' αφτο θάνε σοστο κε τυναντίο:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

κε

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Επομένος, **αν ένα τριόνιμο ίνε ίσο με άθρισμα τον τετραγόνον διο οπιονδίποτε αριθμον, αφκσιμένο ί ελατομένο κατα το διπλάσιο γινόμενο τον αριθμον αφτον, μπορι να αντικατασταθι με το τετράγονο τυ αθρίσματος ί τις διαφορας τον αριθμον αφτον.**

Παραδίγματα.

1. a^2+2a+1.

Επιδι $1=1^2$ xε $2a=2\cdot a\cdot 1$, γι' αφτο το $a^2+2a+1=$ $=(a+1)^2$.

2. x^4+4-4x^2.

Επιδι $x^4=(x^2)^2$, $4=2^2$ xε $4x^2=2x^2\cdot 2$, γι' αφτο:

$$x^4+4-4x^2=(x^2-2)^2.$$

Μπορύςαμε αχόμα να γράπςυμε $x^4+4-4x^2=(2-x^2)^2$, επιδι τα διόνιμα x^2-2 xε $2-x^2$, αν ιπςοθύνε στο τετράγονο, θα δόςυνε τριόνιμα, πυ θά̆χυνε μονάχα διαφορα ςτι ςιρα τον όρον.

$$(x^2-2)^2=x^4-4x^2+4, \quad (2-x^2)^2=4-4x^2+x^4.$$

3. $-x+25x^2+0{,}01$.

Στιν περίπτοςι αφτι έχυμε διο τετράγονα: $25x^2=(5x)^2$ xε $0{,}01=0{,}1^2$. Το διπλάςιο γινόμενο τον αριθμον $5x$ xε $0{,}1$ ίνε $2\cdot 5x\cdot 0{,}1=x$. Επιδι ςτο δομένο τριόνιμο xε τα διο τετράγονα ίνε θετιxα xε το διπλάςιο γινόμενο (διλ. το x) αρνιτιxο, γι' αφτο θά̆χυμε:

$$-x+25x^2+0{,}01=25x^2-x+0{,}01=(5x-0{,}1)^2=(0{,}1-5x)^2.$$

4. $-x^2-y^2+2xy$.

Βγάζοντας το ςιμίο — όxςο απ' τις παρενθέςις, θά̆χυμε $-(x^2+y^2-2xy)$. Το τριόνιμο πΰνε xλιςμένο ςτις παρενθέςις, θά̆νε, όπος ίνε φανερο ίςο με το $(x-y)^2$. Επομένος:

$$-x^2-y^2+2xy=-(x^2+y^2-2xy)=-(x-y)^2=-(y-x)^2.$$

δ) Κάποτε ίνε δινατο ν' αναλίςυμε το πολιόνιμο ςε γινόμενο παραγόντυν, ε ν ό ν ο ν τ α ς τ υ ς ό ρ υ ς - τ υ ς ε ο μ ά δ ε ς.

Δ.χ.:

1. $ax+ay+bx+by=(ax+ay)+(bx+by)=$
$=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$.

2. $12-4x-3x^2+x^3=(12-4x)-(3x^2-x^3)=$
$=4(3-x)-x^2(3-x)=(3-x)(4-x^2)=(3-x)(2+x)(2-x)$.

3. $m^2+n^2-2mn-p^2=(m^2+n^2-2mn)-p^2=$
$=(m-n)^2-p^2=(m-n+p)(m-n-p)$.

4. $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y^2-6y+9)=x^2-(y-3)^2=$
$=[x+(y-3)][x-(y-3)]=(x+y-3)(x-y+3)$.

ε) Κάποτε ίνε καλο να βάλυμε βοιθιτικυς όρυς ι ν'αναλίςυμε ένα κάπιο όρο ςε διο άλυς.

Λ. χ.:

1. $a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-b^3=a^2(a-b)+b(a^2-b^2)=$
$=a^2(a-b)+b(a+b)(a-b)=(a-b)[a^2+b(a+b)]=$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2).$

2. $a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b+b^3=a^2(a+b)-b(a^2-b^2)=$
$=(a+b)[a^2-b(a-b)]=(a+b)(a^2-ab+b^2).$

3. $2x^2+3xy+y^2=2x^2+2xy+xy+y^2=2x(x+y)+y$
$(x+y)=(x+y)(3x+y).$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

102. $2a+2x,\quad ax+ay,\quad 4y^2-6xy.$
103. $4ax-2ay,\quad 6x^2y+9xy^2.$
104. $12a^2b-9a^2b^2+6ab^3,\quad xy^2-7xy+4x^2y.$
105. $m^2-n^2,\quad a^2-1,\quad 1-a^2.$
106. $x^2-4,\quad m^2-9,\quad 4x^2-y^2.$
107. $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{9}y^6,\quad 0{,}01a^6-9,\quad 3a^5-48b^8.$
108 $(x-y)^2-a^2,\quad 9(a+2b)^2-1,\quad a^2-(b+c)^2.$
109. $(x+y)^2-(x-y)^2,\quad 16x^2-4(x+y)^2.$
110. $x^2-2xy+y^2,\quad m^2+n^2+2mn.$
111. $2ab+a^2+b^2,\quad a^2-4ab+4b^2.$
112. $x^2+8x+16,\quad x^2+1+2x.$
113. $5a^3-20a^2b+20ab^2$
114. $a^2+2ab+b^2-c^2,\quad a^2-b^2-2bc-c^2.$
115. $ax+bx+ay+by,\quad ac-ad+bd-bc.$
116. $a^2+ab-a-b,\quad xz-2y-3z+xy.$
117. $4mn+xy-2nx-2my,\quad 8a^3-12a^2-18a+27$
(ςε 3 παράγοντες)

VI. Αλγεβρικα κλάζματα.

67. Διαφορα τυ αλγεβρικυ κλάζματος απ' το αριθμιτικο. Το πιλίκο τις διέρεςις διο αλγεβρικον παραςτάςεον, ςε περίπτοςι, πυ ι διέρεςι ςιμιόνετε μονάχα, ονομάζετε **αλγεβρικο κλάζμα**. Τέτιες ίνε λ. χ., ι παραςτάςις:

$$\frac{a}{b},\quad \frac{a+b}{c-d},\quad \frac{2x^2-x+5}{x+2}.$$

Θα εκςετάςυμε τόρα μερικες ιδιότιτες τον αλγεβρικον κλαζμάτον.

Ας πάρυμε το κλάζμα, $\frac{a}{b}$. Βρίςκυμε ίςτερα τιν αριθμιτικί-τυ τιμι ςτις ακόλυθες τρις περιπτόςις:

α) $a = 12$, $b = 4$
β) $a = 3$, $b = 7$
γ) $a = -20$, $b = 30$.

Ι αντίςτιχες αριθμιτικες τιμες ςε καθεμια απ' τις παραπάνο περιπτόςις θάνε 3, $\frac{3}{7}$ κε $-\frac{2}{3}$. Επομένος:

ι αριθμιτικι τιμι τυ αλγεβρικυ κλάζματος μπορι νάνε αριθμος ακέρεος κε κλαζματικος, θετικος κε αρνιτικος.

Επιδι το a κε το b, ανάλογα με τυς όρυς τυ προβλίματος, μπορύνε να πάρυνε διάφορες αριθμιτικες τιμες, γι' αφτο ίνε ςοςτο το παρακάτο ςιμπέραζμα:

ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις τυ αλγεβρικυ κλάζματος μπορυν, ο καθένας χοριςτα, να ίνε αριθμι ακέρει ί κλαζματικι, θετικι ί αρνιτικι.

Κ' έτςι, ι ένια τυ αλγεβρικυ κλάζματος ίνε εβρίτερι, απ' ότι τυ αριθμιτικυ. Τα τελεφτέο, μπορι να θεοριθι ςα μερικι περίπτοςι τυ αλγεβρικυ κλάζματος.

68. Θεμελιόδικι ιδιότιτα τυ κλάζματος. Επιδι το κλάζμα ίνε πιλίκο τις διέρεςις τυ αριθμιτι με τον παρονομαςτι κε το πιλίκο εκςάλυ, όπος κςέρυμε, δεν αλάζι, αν πολαπλαςιαςτυν (ί διερεθυν) ο διερετέος κι ο διερέτις μ' ένα κε τον ίδιο αριθμο (εκςον απ' το μιδενικο) (§ 34, δ), γι' αφτο ι ιδιότιτα αφτι ανίκι κε ςτα κλάζματα, διλ. **το μέγεθος τυ κλάζματος δεν αλάζι, αν πολαπλαςιαςτυν (ί διερεθυν) ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις μ' ένα κε τον ίδιο αριθμο (εκςον το μιδενικο).** Αν πολαπλαςιάςυμε λ. χ. τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι τυ κλάζματος

$$\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} \text{ επι το } -\frac{4}{9}, \text{ τότε θάχυμε:}$$

το προιγύμενο κλάζμα: $-\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = -\frac{10}{21}$,

το νέο κλάζμα:

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]:\left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]=\left(+\frac{8}{27}\right):\left(-\frac{28}{45}\right)=$$

$$=-\frac{8\cdot 45}{27\cdot 28}=-\frac{360}{756}=-\frac{10}{21}.$$

Επομένος, το μέγεθος τυ κλάζματος παραμένι το ίδιο.

Ι ιδιότιτα αφτι τυ κλάζματος μας επιτρέπι να εφαρμόςυμε κε ςτα αλγεβρικα κλάζματα τυς ίδιυς μεταςχιματιζμυς, πυ κάναμε με τα αριθμιτικα κλάζματα: απλοπιύμε διλ. κε τα αλγεβρικα κλάζματα, τα τρέπυμε ςε ομόνιμα, όταν ένα τέτιο πράμα θα χριαςτι κ. τ. λ.

69. Τροπι ςίνθετον κλαζμάτον ςε απλα. Αν ι όρι τυ κλάζματος ίνε κι αφτι κλάζματα, τότε μπορύμε πολαπλαςιάζοντάς-τυς επι ένα κάπιο αριθμο ι αλγεβρικι παράςταςι, να τυς τρέπςυμε ςε ακέρευς. Π.χ:

1) $\dfrac{\frac{3}{4}a}{b}$, πολαπλαςιάζοντας κε τυς διο όρυς επι 4, θάχυμε $\dfrac{3a}{4b}$,

2) $\dfrac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n}$, „ „ „ „ „ „ 24, „ $\dfrac{16m}{21n}$,

3) $\dfrac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$, „ „ „ „ „ „ x, „ $\dfrac{ax^2-x}{x-1}$.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Ας μετατρέπςυμε τα ςίνθετα κλάζματα ςε απλα:

118. $\dfrac{\frac{5}{7}x}{y}$, $\dfrac{0{,}3ab}{m}$, $\dfrac{a^2}{1\frac{3}{8}b}$, $\dfrac{m}{2{,}36n}$.

119. $\dfrac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}$, $\dfrac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}$, $\dfrac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$.

120. $\dfrac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}$, $\dfrac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$.

121. $\dfrac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}$, $\dfrac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$.

70. Αλαγι τον ςιμίον τον όρον τυ κλάζματος: Ι αντικατάςταςι τον ςιμίον τον όρον τυ κλάζματος με τα αντίθετάτυς ιςοδιναμι με πολαπλαςιαζμό-τυς επι το -1. Απ' τον πολαπλαςιαζμο αφτο, όπος μάθαμε, το μέγεθος τυ κλάζματος δεν αλάζι. Λ.χ:

$$\frac{-8}{-4}=2 \text{ κε } \frac{+8}{+4}=2, \qquad \frac{-10}{+2}=-5 \text{ κε } \frac{+10}{-2}=-5.$$

Πρέπι να ςιμιοθι ακόμα, πος αν αλάκςυμε το ςιμίο ενος κάπιυ όρυ κε ταφτόχρονα αλάκςυμε κε το ςιμίο τυ κλάζματος, το μέγεθος τυ κλάζματος δε θ' αλάκςι πάλι. Λ.χ:

$$\frac{-10}{+2}=-5, \qquad -\frac{-10}{-2}=-5, \qquad -\frac{+10}{+2}=-5.$$

Τιν παραπάνο ιδιότιτα μπορύμε να τιν εφαρμόςυμε ςτο μεταςχιματιζμο τον κλαζμάτον. Λ.χ:

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=-\frac{m^2-n^2}{-(n-m)}=-\frac{(m+n)(m-n)}{m-n}=-(m+n).$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Ν' αλαχτυν τα ςιμία τυ αριθμιτι κε τυ παρονομαςτι τον κλαζμάτον:

122. $\dfrac{1-x}{-x}$, $\dfrac{-3a^2}{a-b}$, $\dfrac{1-a}{2-b}$.

123. $\dfrac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$, $\dfrac{1-m^2}{-m+1}$.

124. Μπροςτα ςτο καθένα απ' τα παρακάτο κλάζματα βάλτε το ςιμίο — φροντίζοντας όμος να μι αλαχτι το μέγεθός-τυς:

$$\frac{-3a}{6}, \quad \frac{5x^2}{-3}, \quad \frac{1-a}{b}, \quad \frac{a}{2-x}, \quad \frac{m^2-n^2}{n-m}.$$

71. Απλοπίιςι τον κλαςμάτον. Τα αλγεβρικα κλάζματα μπορύνε ν' απλοπιιθύνε ςε περιπτόςις, πυ ο αριθμιτις κε ο παρονομαςτις έχυνε κινυς παράγοντες.

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α.

$$\frac{48ab}{60ac}=\frac{4b}{5c},\qquad \frac{3a^2b}{7a^3b}=\frac{3}{7a},\qquad \frac{160a^5b^2cd^2}{120a^3b^5c}=\frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Απ'τα παραδίγματα, πυ φέραμε, ςιμπερένυμε ότι:

κατα τιν απλοπίιςι τον κλαςμάτον, τυς ςιντελεςτες τυ αριθμιτι κε τυ παρονομαςτι τυς διερύμε με το μέγιςτο κινο διερέτι-τυς κε τυς κινυς ενγράματυς παράγοντες με τι μικρότερι δίναμι, ςτιν οπία βρίςκυντε ςτον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι.

Αν ς' ένα κλάζμα ο αριθμιτις ί ο παρονομαςτις (ί κ' ι διο) ίνε π ο λ ι ό ν ι μ α, τότε πρέπι, πριν να γίνι ι απλοπίιςι, να τυς αναλίςυμε ςε γινόμενο παραγόντον (§ 66). Αν ιπάρχυνε κινι παράγοντες, τότε μ' αφτυς μπορύμε ν' απλοπιίςυμε το κλάζμα.

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y},$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$$

(ι διέρεςι με το 2 ιςοδιναμι με πολαπλαςιαζμο επι το $\frac{1}{2}$).

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Ν' απλοπιιθυν τα κλάζματα:

125. $\frac{7}{7x}$, $\frac{2m}{3m^2}$, $\frac{4a^2b}{6ab^2}$, $\frac{42x^3y^3}{112x^2y^2}$.

126. $\frac{12ab}{8ax}$, $\frac{3a^2bc}{12ab^2}$, $\frac{48a^3x^2y^4}{25a^2xy}$.

127. $\frac{ab}{a^2+ab}$, $\frac{9xy}{3x^2-3xy}$, $\frac{4a+8}{4a-8}$.

128. $\frac{a^2+a}{a^2-a}$, $\frac{x-3}{x^2-9}$, $\frac{a^2+a}{a^2-1}$.

129. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$, $\frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$, $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$.

130. $\frac{(a+b)^2(a+b)^2}{a^2-b^2}$, $\quad \frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$.

2. Τροπι ετερονίμον κλαζμάτον ςε ομόνιμα.

Ας πάρυμε κλάζματα, ι παρονομαςτες τον οπίον ίνε ενγράματα μονόνιμα. Π. χ:

$$\frac{a}{2b},\quad \frac{c}{3ab},\quad \frac{d}{5ab^2}.$$

Ος κινο παρονομαςτι πρέπι να πάρυμε, όπος ίνε φανερο, το $30ab^2$. Ι ςιμπλιρωματικι παράγοντες τότε θάνε: $15ab$, $10b$ κε 6.

$$\frac{a\overbrace{\qquad}^{15ab}}{2b}=\frac{15a^2b}{30ab^2},\quad \frac{c\overbrace{\quad}^{10b}}{3ab}=\frac{10bc}{30ab^2},\quad \frac{d\overbrace{\quad}^{6}}{5ab^2}=\frac{6d}{30ab^2}.$$

Ας πάρυμε κ' ένα άλο παράδιγμα:

$$\frac{a}{12b^2c},\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2},\quad \frac{5c}{18ab}.$$

Ο κινος παρονομαςτις πρέπι να διερεθι με όλυς τυς παρονομαςτες τον κλαζμάτον. Επομένος, ο μικρότερος ςιντελεςτις τυ κινυ παρονομαςτι θάνε το ελάχιςτο κινο πολαπλάςιο τον ςιντελεςτον όλον τον κλαζμάτον. Ο κινος παρονομαςτις πρέπι να περιέχι κε τυς παράγοντες με γράματα ςε κίνι τι δίναμι, πυ διερίτε με τιν κάθε δίναμι, πυ έχι ο παράγοντας αφτος ςτυ παρονομαςτες. Στο παραπάνο λιπον παράδιγμα, ος ςιντελεςτι τυ κινυ παρονομαςτι, πρέπι να πάρυμε το ελάχιςτο κινο πολαπλάςιο τον αριθμον 12, 8 κε 18, διλ. το 72. Ο παράγοντας a πρέπι να παρθι με εχθέτι 3, ο παράγοντας b με εχθέτι 2 κ.τ.λ. Ο κινος παρονομαςτις θάνε: $72a^3b^2c^4d^2$.

Ι ςιμπλιρωματικι παράγοντες θάνε: $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ κε $4a^2bc^4d^2$. Σίμφονα με κίνα, πυ ίπαμε παραπάνο, θάχυμε:

$$\frac{a\overbrace{\qquad\quad}^{6a^3c^3d^2}}{12b^2c}=\frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2},\quad \frac{3b\overbrace{\quad}^{9b^2}}{8a^3c^4d^2}=\frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2},$$

$$\frac{5c\overbrace{\qquad\quad}^{4a^2bc^4d^2}}{18ab}=\frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4b^2}.$$

Απ' τα παραδίγματα, που αναφέραμε, ςιμπερένυμε

για να βρύμε τον κινο παρονομαςτι ετερόνιμον αλγεβρικον κλαςμάτον με μονόνιμυς παρονομαςτες, πρέπι να πάρυμε το ελάχιςτο κινο πολαπλάςιο τον ςιντελεςτον όλον τον παρονομαςτον καθος κε όλυς τυς παράγοντές-τυς με γράματα καθένα ςτι μεγαλίτερι δίναμι με τιν οπία μπένυν ςτυς δομένυς παρονομαςτες. Το γινόμενο όλον αφτον τον παραγόντον, θάνε ο κινος παρονομαςτις τον δομένον κλαςμάτον.

β) Ας πάρυμε τόρα κλάςματα, ι παρονομαςτες τον οπίον ίνε πολιόνιμα. Λ.χ.:

$$\frac{x}{a-b},\quad \frac{y}{a+b},\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Για να τραπύνε ςε ομόνιμα, αναλίυμε τυς παρονομαςτές-τυς ςε γινόμενα παραγόντον. Ι πρότι διο δεν αναλίυντε, μα ο τρίτος ίνε ίςος με το γινόμενο $(a+b)(a-b)$. Επομένος, ο κινος παρονομαςτις θάνε a^2-b^2. Θάχυμε λιπον:

$$\frac{\overset{a+b}{x}}{a-b}=\frac{ax+bx}{a^2-b^2},\quad \frac{\overset{a-b}{y}}{a+b}=\frac{ay-by}{a^2-b^2},\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

γ) Μπορυν όμος να τίχυν κε περιπτόςις, πυ κανένας παρονομαςτις να μιν έχι ίδιο παράγοντα με κάπιον άλο. Τότε εργαζόμαςτε έτςι, όπος κε ςτιν αριθμιτικι: Πολαπλαςιάζυμε διλ. τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι κάθε κλάςματος επι το γινόμενο τον παρονομαςτον όλον τον άλον κλαςμάτον.

Λ. χ.:

1. $\frac{a}{3m},\ \frac{2b}{5n},\ \frac{3c}{2},\ \therefore\ \frac{a\cdot 5n\cdot 3p}{3m\cdot 5n\cdot 2p},\ \frac{2b\cdot 4m\cdot 2p}{5n\cdot 3m\cdot 2p},$

$\frac{3c\cdot 3m\cdot 5n}{2p\cdot 3m\cdot 5n},$ διλ. $\frac{10}{30}\frac{anp}{mnp},\ \frac{12}{30}\frac{bmp}{mnp}\ \frac{45}{30}\frac{cmn}{mnp}.$

2. $\frac{a}{a+b},\ \frac{a}{a-b},\ \therefore\ \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)},$

$\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)},$ διλ. $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2},\ \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$

Κάντε αναγογι τον κλαζμάτον ςε κινο παρονομάςτι.

131. $\frac{3}{a}, \quad \frac{4}{6}, \qquad \frac{x}{3y}, \quad \frac{y}{4x}, \quad \frac{x}{4}, \quad \frac{4}{x}.$

132. $\frac{2}{a}, \quad \frac{3}{b}, \quad \frac{1}{2c}, \qquad \frac{7x}{2a^2} \quad \frac{2}{3b^2} \quad \frac{4b^2}{5x}.$

133. $\frac{5xy}{3a^2bc}, \quad \frac{3ab}{4mx^2y} \qquad \frac{x}{4ab}, \quad \frac{y}{8a^3b^2}.$

134. $\frac{3}{8ab}, \quad 3x, \quad \frac{a}{5x^3}$ (παραςτένοντας το $3x$ με κλάζμα $\frac{3x}{1}$).

135. $\frac{x+y}{2x-2y}, \quad \frac{x-y}{3x+3y}, \quad \frac{1}{m+1}, \quad \frac{2}{m^2-1}, \quad \frac{3}{m-1}.$

136. $\frac{2}{x^2-2x+1}, \quad \frac{3a}{x-1}, \quad \frac{1}{x-1}, \quad \frac{2}{2x-1},$

$$\frac{1}{(x-1)(2x-1)}.$$

137. $\frac{x}{28a^3b^2}, \quad \frac{y}{21a^2b}, \qquad \frac{a-b}{b}, \quad \frac{2}{a-b} \quad \frac{1}{a^2-b^2}.$

73. Πρόςθεςι κε αφέρεςι κλαςμάτον. Εχοντας ιπόπςι τον κανόνα τις διέρεςις πολιονίμυ με μονόνιμο (§ 59) μπορύμε να γράπςυμε:

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}, \qquad \frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

Διαβάζοντας απ' τα δεχςια προς τ' αριςτερα τις ιςότιτες αφτες, παρατιρύμε:

1. Για να προςθέςυμε κλάζματα ομόνιμα, αρκι να προςθέςυμε μοναχα τυς αριθμιτές-τυς κε να γράπςυμε ςαν αριθμιτι το άθριζμά-τυς κε ςαν παρονομαςτι τον κινο παρονομαςτι.

2. Για ν' αφερέςυμε ομόνιμα κλάζματα, αρκι ν' αφερέςυμε τυς αριθμιτές-τυς κε να γράπςυμε ςαν αριθμιτι τι διαφορά-τυς κε ςαν παρονομαςτι τον κινο παρανομαςτι.

Αν τα κλάζματα πυ θα προςτεθυν ί θ' αφερεθυν ίνε ετερό-

νιμα, τα τρέπυμε πρότα ςε ομόνιμα κ᾽ ίςτερα χάνυμε τις ςιμιομένες πράκςις.

Δ. χ.:

1. $\frac{a\overset{df}{\smile}}{b}+\frac{c\overset{bf}{\smile}}{d}+\frac{e\overset{bd}{\smile}}{f}=\frac{adf+cbf+ebd}{bdf}.$

2. $\frac{3m^2\overset{2b}{\smile}}{10a^2bc}-\frac{5n^2\overset{5ac}{\smile}}{4ab^2}=\frac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}.$

3. $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x^2+3}{2x^2-2}$:

$2x-2=2(x-1)$	Σιμπλ. παρ. $=x+1$
$2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)\ (x-1)$	» » $=\ 1$
Κινος παρονομ. $2(x+1)(x-1)$	

Κάνοντας τιν αφέρεςι θἄχυμε:

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=$$

$$=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

138. $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c},\quad \frac{2}{x^2}+\frac{5}{3x},\quad \frac{a-1}{2}-\frac{2x+3}{4}.$

139. $1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$ (παραςτένοντας το 1 με κλάζμα $\frac{1}{1}$).

140. $1+\frac{x-1}{2},\quad x-\frac{2(3-x)}{3},\quad 1-\frac{2(x-1)}{3}.$

141. $\frac{2+x}{1+2x}-\frac{2-x}{1-2x}-\frac{1+6x}{4x^2-1}.$

142. $\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a+b}{a^2-ab}.$

143. Σε τί θα μετατραπι το κλάζμα $\frac{m-x}{n-1}$, αν αντι το x βάλυμε $\frac{mn}{m+n}$;

74. Πολαπλαςιαζμος κλαζμάτον. Το γινόμενο διο κλαζμάτον ίνε ίςο με κλάζμα, πυ έχι ος αριθμιτι το γινόμενα τον αριθμιτον τον δομένον κλαζμάτον κε ος παρονομαςτι το γινόμενο τον παρονομαςτόν-τυς.

Διλαδι:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \qquad (1)$$

Ο κανόνας αφτος ίνε ο ίδιος με κίνον, πυ εφαρμόζυμε, όταν έχυμε να πολαπλαςιάςυμε αριθμιτικα κλάζματα. Επιδι όμος τα γράματα μπορύνε να παραςτίςυν όχι μονάχα ακέρευς θετικυς αριθμυς, αλα ακόμα κε κλαζματικυς, κε αρνιτικυς γι' αφτο ίνε ανάνκι να εκςακριβόςυμε, αν ο κανόνας αφτος επαλιθέβι κε για τα αλγεβρικα κλάζματα ςτιν περίπτοςι, πυ ι αριθμι αφτι a, b, c κε d, θα ίνε οπιδίποτε. Εχυμε λ. χ.:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{7}{8}, \quad c = \frac{5}{6} \text{ κε } d = \frac{9}{4}.$$

Αντικαταςτένοντας τα γράματα ςτιν ιςότιτα (1) με τυς αριθμυς αφτυς, βρίςκυμε τιν αριθμιτικι τιμι κάθε μέλυς τις ιςότιτας κε ςινκρίνυμε τα εκςαγόμενα, πυ θα προκίπςυν ανάμεςά-τυς.

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} : \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 7}, \qquad \frac{c}{d} = \frac{5}{6} : \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9}$$

(περιτο λογαριάζυμε ςτιν όρα να ςινεχίςυμε τιν πράχςι).

Βρίςκυμε τόρα τιν αριθμιτικι τιμι τυ δεχςιυ μέλυς τις ιςότιτας (1):

$$ac = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 6}, \qquad bd = \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 4},$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} : \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9}.$$

Σινκρίνοντας τα εκςαγόμενα, πυ βρίκαμε, βλέπυμε πος ίνε τα ίδια, επιδι (ςίμφονα με τον αντιμεταθετικο νόμο τυ πολαπλαςιαζμυ τον ακέρεον αριθμον) ίνε: $2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4$ κε $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9$. Επομένος ι ιςότιτα (1) αλιθέβι κε ςτιν περίπτοςι αφτι.

Ας ιποθέςυμε τόρα, πος ένας οπιοςδίποτε απ' τυς αριθμυς a, b, c κε d ίνε αρνιτικος. Ινε λ.χ. $a = -\frac{2}{3}$ (το b, c κε d έχυνε τις προιγύμενές-τυς τιμες). Στιν περίπτοςι αφτι το κλάζμα $\frac{a}{b}$ καθος κε όλο το αριστερο μέλος τις ιςότιτας (1) θα γίνι αρνιτικο. Εχςάλυ, επιδι το γινόμενο ac στο δεχςιο μέλος τις ιςότιτας θα γίνι αρνιτικο, γι' αφτο κι όλο το δεχςιο μέλος θα γίνι κι αφτο αρνιτικο. Ι απόλιτι τιμι κε στα διο μέλι τις ιςότιτας θα παραμίνι μολατάφτα ι ίδια. Επομένος δε χαλνα ι ιςότιτα (1). Με τον ίδιο τρόπο μπορύμε να βεβεοθύμε, πος ι ιςότιτα (1) θ' αλιθέβι κε σε περίπτοςι, πυ κ' ι άλι αριθμι γίνυν αρνιτικι.

Οςα ίπαμε ςχετικα με το παραπάνο παράδιγμα, παραμένυνε ςοςτα κε για κάθε άλο παράδιγμα. Επομένος ι ιςότιτα (1) αλιθέβι οπιεςδίποτε τιμες κι αν δόςυμε στα γράματα a, b, c κε d.

75. Τετράγονο κε κίβος κλάζματος. Ας εφαρμόςυμε τον κανόνα τυ πολαπλαςιαζμυ τον κλαζμάτον στιν περίπτοςι πυ θέλυμε να ιπςόςυμε στο τετράγονο ί στον κίβο. Σίμφονα μ' αφτόνε θάχυμε:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Επομένος,

για να ιπςόςυμε στο τετράγονο ί στον κίβο αλγεβρικο κλάζμα, πρέπι να ιπςόςυμε στι δίναμι αφτι χοριστα τον αριθμιτι κε τον παρανομαστι.

76. Διέρεςι κλαζμάτον. Για να διερεθι κλάζμα δια κλάζματος, αρκι να πολαπλαςιαςτι ο αριθμιτις τυ πρότυ κλάζματος επ' τον παρονομαστι τυ δέφτερυ, ο παρονομαστις τυ πρότυ επι τον αριθμιτι τυ δέφτερυ κε να παρθι ίστερα το πρότο γινόμενο ος αριθμιτις κε το δέφτερο, ος παρονομαστις. Θάχυμε λιπον:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Για να βεβεοθύμε, αν αλιθέβι ίτε όχι ι παραπάνο ιςότιτα, οπιαδίποτε τιμι κι αν έχυν ι αριθμι a, b, c κε d, χάνυμε τι δοκιμι τις διέρεςις (πολαπλαςιάζυμε διλ. το πιλίκο επι το διερέτι). Το εχςαγόμενο, πυ θα προκίπςι, πρέπι νάνε ίςο με το διερετέο:

$$\frac{ad}{bc} : \frac{c}{d} = \frac{adc\,cd}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

77. Σιμιόςις. 1) Επιδι $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, γι' αφτο τον κανόνα τις διέρεςις μπορύμε να διατιπόςυμε χι αλιότικα:

για να διερεθι κλάζμα δια κλάζματος, αρκι να πολαπλαςιαςτι το πρότο κλάζμα επι το αντίςτροφο τυ δέφτερυ.

2) Κάθε μια ακέρεα αλγεβρικι παράςταςι μπορι να θεοριθι ος κλάζμα με αριθμιτι τιν ακέρει αφτι παράςταςι κε παρονομαςτι το 1. Δ. χ.: $a = \frac{a}{1}$, $3x^2 = \frac{3x^2}{1}$ κ.τ.λ. Για το λόγο αφτο, **ι κανόνες, πυ αφορυν τις πράκςις πάνο ςτα κλάζματα, ιςχίυνε κε ςε περίπτοςι, πυ μια κάπια αλγεβρικι παράςταςι ίνε ακέρεος αριθμος** αρκι μονάχα ι ακέρει αφτι παράςταςι να παραςτιθι ος κλάζμα. Δ. χ.:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

144. $-\frac{3x}{5a} \cdot \frac{10ab}{7x^3}$, $\quad \frac{1-a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1-a^2}$.

145. $\frac{4x^2y^2}{15n^4a^3} \cdot 45p^2q^2$, $\quad \frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{6a}{x+1}$.

146. $\left(a + \frac{ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{ab}{a+b}\right)$, $\quad \frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4} : \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^2}$.

147. $\frac{12a^4b^2}{5mp} : 4ab^2$, $\quad 81a^3b^2 : \frac{27ab^2}{5x^2y}$.

148. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{5a^2+5b^2}{a+b}$, $\quad \left(x + \frac{xy}{x-y}\right) : \left(x - \frac{xy}{x+y}\right)$.

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ.

ΕΚΣΙΣΟΣΙΣ ΠΡΟΤΥ ΒΑΘΜΥ.

1. Γενικες ιδιότιτές τον εκςιςόςεον.

78. Ιςότιτες κε ιδιότιτές-τυς. Διο αριθμι ί διο αλγεβρικες παραςτάςις, πυ ενόνυντε ανάμεςά-τυς με το ςιμίο =, αποτελυν ι ς ό τ ι τ α. Ι αριθμι αφτι ίτε ι παραςτάςις ονομάζυντε μ έ λ ι τις ιςότιτας. Το μέλος τις ιςότιτας, πυ βρίςκετε αριςτερα απ' το ςιμίο =, ονομάζετε α ρ ι ς τ ε ρ ο κε το μέλος, πυ βρίςκετε δεκςια απ' το ςιμίο αφτο, ονομάζετε δ ε κ ς ι ο. Στιν ιςότιτα λ.χ:

$$a + a + a = a \cdot 3$$

το αριςτερο μέλος ίνε το άθριζμα $a + a + a$ κε το δεκςιο, το γινόμενο $a \cdot 3$.

Παραςτένοντας κάθε μέλος τις ιςότιτας μ' ένα μόνο γράμα, μπορύμε να διατιπόςυμε τις κιριότερες ιδιότιτες τις ιςότιτας με τον ακόλυθο τρόπο:

α) Αν ίνε $a = b$, θάνε κε $b = a$, διλ. **τα μέλι τις ιςότιτας μπορύνε ν' αλάκςυνε θέςι μετακςί-τυς.**

β) Αν ίνε $a = b$ κε $b = c$, θάνε κε $a = c$ διλ. **αν διο αριθμι ίνε ίςι με τρίτο, θάνε ίςι κε μετακςί-τυς.**

γ) Αν ίνε $a = b$ κε $m = n$, θάνε κε $a + m = b + n$ κε $a - m = b - n$, διλ. **αν προςτεθυν ςε ίςυς αριθμυς ί αν αφερεθυν απο ίςυς αριθμυς ίςι αριθμι, προκίπτι ιςότιτα ιςοδίναμι.**

δ) Αν ίνε $a = b$ κε $m = n$, θάνε κε $am = bn$ κε $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, διλ. **αν ίςι αριθμι πολαπλαςιαςτυν ί διερεθύνε με ίςυς αριθμυς, προκίπτι ιςότιτα ιςοδίναμι.**

Για να πολαπλαςιαςτυν ί να διερεθυν κε τα διο μέλι τις ιςότιτας επι το — 1, αρκι ν' αλάκςυμε τα

ςιμία, πυ βρίςκυντε μπροςτα απ' τα μέλι τις ιςότιτας. Αν λ.χ. πολαπλαςιαςτύνε κε τα διο μέλι τις ιςότιτας $-x=-5$ επι το -1, θάχυμε: $x=5$.

79. Ταφτότιτα. Διο αλγεβρικες παραςτάςις ονομάζοντε ταφτάνιμες, αν με οπιαδίποτε τιμι τον γραμάτον, πυ μπένυν ς' αφτες, έχυν τιν ίδια τιμι. Τέτιες λ.χ. ίνε ι παραςτάςις:

$$ab \text{ κε } ba, \; a+(b+c) \text{ κε } a+b+c.$$

Αν ςε κάπια ιςότιτα κε τα διο μέλι ίνε ταφτόςιμες αλγεβρικες παραςτάςις, ι ιςότιτα αφτι ονομάζετε ταφτότιτα. Τέτια λ.χ. ίνε ι ιςότιτα:

$$a+b+c=a+(b+c).$$

Ι ιςότιτα, πυ έχι αριθμυς, πυ παραςτένυντε με πςιφία, ονομάζετε κι αφτι ταφτότιτα, αν κε τα διό-τις μέλι ίςτερα απ' τιν εχτέλεςι όλον τον πράκςεον, πύνε ς' αφτα ςιμιομένες, δίνυν ένα κε τον ίδιο αριθμο. Δ.χ.:

$$(40 \cdot 5) : 8 = 5^2.$$

80. Εκςίςοςι. Ας ιποθέςυμε, πος πρόκιτε να λίςυμε το ακόλυθο πρόβλιμα: ένας πατέρας ίνε 40 χρονον. Ο γιός-τυ ίνε 17 χρονον. Ιςτερα απο πόςα χρόνια ι ιλικία τυ πατέρα αφτυ θα γίνι διπλάςια απ' τιν ιλικία τυ γιύ-τυ;

Με το ςινιθιςμένο (αριθμιτικο) τρόπο ίνε δίςκολο να λιθι το πρόβλιμα αφτο. Θα δοκιμάςυμε γι' αφτο να το λίςυμε, εφαρμόζοντας τις παραςτάςις με γράματα. Το ζιτύμενο αριθμο τον χρόνον θα παραςτίςυμε με το γράμα x. Λέμε διλ., πος ίςτερα απο x χρόνια ο πατέρας θάνε $40+x$ χρονον κι ο γιος $17+x$ χρονον. Σίμφονα με τυς όρυς τυ προβλίματος ο πατέρας θάχι διπλάςια ιλικία απ' το γιό-τυ, θάνε διλ. τα χρόνια τυ πατέρα $(40+x)$ διο φορες περιςότερα απ' τα χρόνια τυ γιύ-τυ $(17+x)$. Αφτο μπορι να γραφι με μορφι ιςότιτας:

$$40+x=2\ (17+x).$$

Κάνοντας τι δοκιμι θα βεβεοθύμε, πος ι ιςότιτα αφτι αλιθέβι μονάχα αν $x=6$. Κε πραγματικα με τιν τιμι αφτι τυ x θάχυμε:

$$40+6=2\ (17+6),\; 46=46.$$

Οπιαδίποτε άλι τιμι κι αν δόςυμε ςτο x, ι ιςότιτα δε θα επαλιθέψι.

Ι ιςότιτα αφτι δεν ίνε δινατο να ονομαςτι ταφτότιτα, επιδι δεν

αλιθέβι, οπιαδίποτε τιμι κι αν δόςυμε στα γράματα, πυ έχι. Θα γίνι τότες μονάχα ταφτότιτα, αν δόςυμε στο x τιμι 6:

$$46 = 46.$$

Αν κε τα δίο μέλι τις ισότιτας, πυ περιέχι ένα ί κάμποσα γράματα, έχυν όμιο αριθμιτικο μέγεθος όχι με κάθε τιμι τον γραμάτον, τότε ι ισότιτα αφτι ονομάζετε εκςίςοςι. Ι αριθμι, πυ παραςτένυντε με τα γράματα αφτα, ονομάζυντε άγνοςτι (αριθμι) τις εκςίςοςις. Σινίθος τυς άγνοςτυς μιας εκςίςοςις παραςτένυμε με τα τελεφτέα γράματα τυ λατινικυ αλφαβίτυ (x, y, z...).

Εκςιςόςις έχυμε μ' ένα άγνοςτο, με διο κ.τ.λ.

Λίςι τις εκςίςοςις λέγετε ι έβρεςι τον τιμον τον άγνοςτον, ι οπίες ικανοπιυν τιν εκςίςοςι διλαδι τι μετατρέπυν σε ταφτότιτα. Ι τιμες αφτες τον άγνοςτον ονομάζυντε ρίζες τις εκςίςοςις.

Ι εκςίςοςι μ' ένα άγνοςτο μπορι νάχι μια ρίζα, διο ί κε περιςότερες. Ι εκςίςοςι λ. χ: $3x - 2 = 13$ έχι μια ρίζα (5), ι εκςίςοςι $x^2 + 2 = 3x$ έχι διο ρίζες (1 κε 2,) ι εκςίςοςι: $(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$ έχι τρις ρίζες (1, 2 κε -1)[1] κ.τ.λ. Τιχένυν όμος κε περιπτόςις, πυ να μιν έχυν ι εκςιςόςις ύτε μια ρίζα. Τέτια ίνε λ.χ. ι εκςίςοςι $x^2 = -4$. Οπιοδίποτε αριθμο θετικο ί αρνιτικο κε αν βάζυμε στι θέςι τυ x, δε θάνε ποτες δινατο το τετράγονο τυ αριθμυ αφτυ νάνε ίςο με αρνιτικο αριθμο.

Ι εκςίςοςι, πυ ςχιματίςαμε παραπάνο οδιγύμενι απ' τυς όρυς τυ προβλίματός-μας, έχι ρίζα 6. Ο αριθμος αφτος ίνε κίνος, πυ ζιτύμε. Κε πραγματικα, ίςτερα απο 6 χρόνια ο πατέρας θάχι ιλικία 46 χρονον κι ο γιός-τυ 23 χρονον, διλ. διο φορες μικρότερι.

Κι έτςι, για τι λίςι μερικον προβλιμάτον ίνε καλο να καταφίγυμε στο ςχιματιζμο εκςιςόςεον κε να μάθυμε να τις λίνυμε. Για το ςκοπο αφτο, ίνε ανάνκι να γνοριςτύμε με μερικες γενικες ιδιότιτες τον εκςιςόςεον.

Ας λίςυμε λ. χ. τίν εκςίςοςι, πυ ςχιματίςαμε παραπάνο:

$$40 + x = 2\ (17 + x).$$

Εκςαλίφοντας τις παρενθέςις στο δεκςιο μέλος τις εκςίςοςις θάχυμε:

$$40 + x = 34 + 2x.$$

[1] Ας θιμιθύμε, ότι αν ένας απ' τυς παράγοντες ίνε ίςος με το μιδενικο, τότε κε το γινόμενο θάνε ίςο με το μιδενικο κε τυναντίο.

Ας αφερέςυμε τόρα κι απ' τα διο μέλι τις εκςίςοςις τον ίδιο αριθμο x. Θάχυμε:

$$40 = 34 + x.$$

Αφερόντας ςτο τέλος κι απ' τα διο μέλι τις εκςιςόςις τον ίδιο αριθμο 34, θάχυμε:

$$6 = x \text{ κε επομένος, } x = 6.$$

Οπος λιπον ίδαμε, ίςτερα απο ςιρα μεταςχιματιζμον βρίκαμε για το x τιν τιμι τυ 6.

Με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο λίνυντε κ' ι άλες εκςίςοςις, όπος θα δύμε παρακάτο.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

149. Πέςτε, πιές απ' τις παρακάτο ιςότιτες μπορύνε να ονομαςτυν ταφτότιτες κε πιές εκςιςόςις:

$$x + y = y + x, \quad (a - b + x)c = ac - bc + xc,$$
$$3a - 4 = 2a + 1, \quad 8x + 1 = 5x + 7, \quad a(bc) = abc,$$
$$2x = x + 1, \quad (xy) : y = x, \quad a : 2b = \frac{a}{2} : b;$$

81. Ιςοδίναμες εκςιςόςις. Ιςοδίναμες λέγυντε διο εκςιςόςις, αν όλες ι ρίζες τις μιας εκςίςοςις ίνε κε ρίζες τις άλις εκςίςοςις κε τυναντίο, αν όλες ι ρίζες τις δέφτερις εκςίςοςις ίνε κε ρίζες τις πρότις εκςίςοςις. Ι εκςιςόςις λ. χ.

$$x^2 + 2 = 3x \text{ κε } 3x - 2 = x^2$$

ίνε ιςοδίναμες, γιατι έχυν τις ίδιες ρίζες 1 κε 2. Ι εκςιςόςις όμος

$$7x = 14 \text{ κε } x^2 + 2 = 3x$$

δεν ίνε ιςοδίναμες, επιδι ι πρότι απ' αφτες έχι μονάχα μια ρίζα το 2, ενο ι άλι εκςον απ' τι ρίζα αφτι, έχι κε δέφτερι ρίζα το 1.

Οταν, λίνοντας μια κάπια εκςίςοςι, κάνυμε μερικυς μεταςχιματιζμυς, τότε με τυς μεταςχιματιζμυς αφτυς αντικαταςτένυμε τι δομένι εκςίςοςι διαδοχικα με άλες πιο απλες, όςπυ να βρύμε ςτο τέλος τιν πιο απλι απ' όλες τις εκςιςόςις: $x = a$. Στιν περίπτοςι αφτι λέμε, πος ο αριθμος a ίνε ι ρίζα τις δομένις εκςίςοςις. Ενα τέτιο όμος πράμα θα πύμε μονάχα τότες, όταν ίμαςτε βέβει, πος όλες ι εκςιςόςις, πυ προκίπςανε απ' τυς διάφορυς μεταςχιματιζμυς, ίνε ιςοδίναμες με τι δομένι εκςίςοςι.

Ι διάφορι μετασχιματιζμι, τυς οπίυς χάνυμε, ςτιρίζυντε ςε διο ιδιότιτες τις εχςίςοςις, τις οπίες θα εχςετάςυμε παραχάτο.

82. Πρότι ιδιότιτα τον εκςιςόςεον. Ας πάρυμε μια χάπια εχςίςοςι, λ. χ. τιν αχόλυθι:

$$x^2 + 2 = 3x. \qquad (1)$$

Ας ιποθέςυμε, πος χε ςτα διο μέλι τις εχςίςοςις αφτις προςθέςαμε ένα χε τον ίδιο αριθμο m (θετιχο, αρνιτιχο ι μιδενιχο). Στιν περίπτοςι αφτι θάχυμε τιν χενύργια εχςίςοςι:

$$x^2 + 2 + m = 3x + m. \qquad (2)$$

Ας αποδίχςυμε τόρα, πος ι εχςίςοςι αφτι ίνε ιςοδίναμι με τι δομένι. Για το ςχοπο αφτο πρέπι να βεβεοθύμε πρότα, πος χάθε ρίζα τις εχςίςοςις (1) αλιθέβι χε τιν εχςίςοςι (2) χ' ίςτερα, αντίθετα, πος χάθε ρίζα τις εχςίςοςις (2) αλιθέβι χε τιν εχςίςοςι (1).

α) Ας ιποθέςυμε, πος ι εχςίςοςι (1) έχι μια χάπια ρίζα. Ινε λ. χ. $x = 1$. Αφτο ςιμένι, πος αν ςτι θέςι τυ x βάζυμε το 1, τότε ι παράςταςι $x^2 + 2$ θα γίνι ίςι με τιν παράςταςι $3x$ (χαθεμια απ' τις παραςτάςις αφτες θάνε ίςι με τον αριθμο 3). Σε τέτια όμος περίπτοςι αν ίνε $x = 1$ τα αθρίζματα $x^2 + 2 + m$ χε $3x + m$ θα γίνυν ίςα, επιδι, όπος χςέρυμε, αν ςτυς ίςυς αριθμυς (3 χε 3) προςθέςυμε ένα χε τον ίδιο αριθμο (m), θάχυμε ίςυς αριθμυς ($3 + m$ χε $3 + m$). Επομένος, ι ρίζα $x = 1$ πρέπι νάνε χε ρίζα τις εχςίςοςις (2). Αν ι εχςίςοςι (1) έχι χε άλι μια χάπια ρίζα, τότε μπορύμε να πύμε χε γι' αφτι το ίδιο, πυ ίπαμε για τι ρίζα $x = 1$, διλ. πος χι αφτι αλιθέβι τιν εχςίςοςι (2). Κ' έτςι, χάθε ρίζα τις εχςίςοςις (1) ίνε χε ρίζα τις εχςίςοςις (2).

β) Ας ιποθέςυμε, πος ι εχςίςοςι (2) έχι μια χάπια ρίζα, λ.χ., $x = 2$. Αφτο ςιμένι, πος αν ςτι θέςι τυ x βάζαμε το 2, τότε ι παράςταςι $x^2 + 2 + m$ θα γινόταν ίςι με τιν παράςταςι $3x + m$ (χαθεμια απ' τις παραςτάςις αφτες θα γινότανε ίςι με τον αριθμο $6 + m$). Σε τέτια όμος περίπτοςι αν ίνε $x = 2$ χ' ι παραςτάςις $x^2 + 2$ χε $3x$ θα γίνυν ίςες, επιδι, όπος χςέρυμε, αν απ' τυς ίςυς αριθμυς ($6 + m$ χε $6 + m$) αφερέςυμε τον ίδιο αριθμο (m), θάχυμε ίςυς αριθμυς. Επομένος, ι ρίζα $x = 2$ ίνε χε ρίζα, τις εχςίςοςις (1). Αν ι εχςίςοςι (2) ίχε χε μια χάπια άλι ρίζα, τότε χε γι' αφτι μπορύςαμε να πύμε, όςα ίπαμε χε για τι ρίζα $x = 2$, διλ. πος χι αφτι ι ρίζα αλιθέβι τιν εχςίςοςι (1).

Επομένος, χ ά θ ε ρίζα τις εχςίςοςις (2) πρέπι να ίνε χε ρίζα τις εχςίςοςις (1).

Κι αφυ ι ρίζες τον εκςιςόςεον (1) κε (2) ίνε ι ίδιες, ι εκςιςόςις αφτες ίνε ιςοδίναμες. Ι ίδια ιδιότιτα εφαρμόζετε κε ςτιν περίπτοςι, πυ αφερύμε κε απ' τα διο μέλι τις εκςίςοςις τον ίδιο αριθμο, γιατι ι αφέρεςι ενος κάπιυ αριθμυ ιςοδιναμι με πρόςθεςι τυ ίδιυ αριθμυ με αντίθετο ςιμίο.

Κ' έτςι **αν κε ςτα διο μέλι τις εκςίςοςις προςθέςυμε ί αφερέςυμε τον ίδιο αριθμο, προκίπτι εκςίςοςι ιςοδίναμι με τιν πρότι.**

83. Πορίζματα. Απ' τιν παραπάνο ιδιότιτα βγάζυμε τ' ακόλυθα πορίζματα, πυ ςιχνα θα τίχι να τα χριςιμοπιίςυμε κατα τι λίςι τον εκςιςόςεον.

1. Τυς όρυς τις εκςίςοςις μπορύμε να τυς μεταφέρυμε απ' το ένα μέλος ςτο άλο με αλαγμένα τα ςιμία-τυς. Προςθέτοντας λ. χ. ςτα διο μέλι τις εκςίςοςις

$$8+x^2=7x-2$$

τον αριθμο 2, θάχυμε:

$$8+x^2+2=7x.$$

Απ' το παραπάνο παράδιγμα φένετε, πος ο όρος — 2, πυ ίχε το ςιμίο — ςτο δεκςιο μέλος, μεταφέρθικε ςτο αριςτερο με αντίθετο ςιμίο. Αφερόντας τόρα κι απ' τα διο μέλι τις τελεφτέας εκςίςοςις τον όρο x^2, θάχυμε:

$$8+2=7x-x^2.$$

Ο όρος $+x^2$ μεταφέρθικε απ' το αριςτερο μέλος ςτο δεκςιο με αντίθετο ςιμίο

2. Αν ένας κάπιος όρος ιπάρχι κε ςτα διο μέλι τις εκςίςοςις με το ίδιο ςιμίο, μπορύμε να τον παραλίψυμε. Λογυχάρι, αν έχυμε τιν εκςίςοςι:

$$6x+3=x^2+3,$$

τότε αφερόντας κι απ' τα διο μέλι τις εκςίςοςις τον αριθμο 3, θάχυμε:

$$6x=x^2.$$

84. Δέφτερι ιδιότιτα τον εκςιςόςεον. Ας πάρυμε τιν ίδια πάλι εκςίςοςι.

$$x^2+2=3x. \qquad (1)$$

κι ας πολαπλαςιάςυμε κε τα διο μέλι-τις επι ένα κάπιο αριθμο m, θετικο ί αρνιτικο (εκςον απ' το μιδενικο). Θάχυμε τότε κενύργια εκςίςοςι:

$$(x^2+2)m=3xm. \qquad (2)$$

Για να βεβεοθύμε, αν ίνε ιςοδίναμες ίτε όχι ι διο αφτες εκςιςόςις, θα εργαςτύμε με τρόπο απαράλαχτα όμιο με τον προιγύμενο: θα δίχςυμε διλ. πρότα, πος καθεμια ρίζα τις εκςίςοςις (1) αλιθέβι κε τιν εκςίςοςι (2) κ' ίςτερα, πος κάθε ρίζα τις εκςίςοςις (2) αλιθέβι τιν εκςίςοςι (1).

α) Ας ιποθέςυμε, πος ι εκςίςοςι (1) έχι μια κάπια ρίζα, λ.χ. $x = 1$. Αφτο ςιμένι, πος αν ςτι θέςι τυ x βάζαμε το 1, τότε ι παράςταςι $x^2 + 2$ θα γινότανε ίςι με τιν παράςταςι $3x$ (καθεμια απ' τις παραςτάςις αφτες θα γινότανε ίςι με τον αριθμο 3). Σε τέτια όμος περίπτοςι, αν ίνε $x = 1$ κε τα γινόμενα $(x^2 + 2)m$ κε $3xm$ θα γινότανε ίςα, επιδι, όπος κςέρυμε, αν τυς ίςυς αριθμυς (3 κε 3) πολαπλαςιάςυμε επι ένα κε τον ίδιο αριθμο (m), θάχυμε ίςυς αριθμυς ($3m$ κε $3m$). Επομένος ι ρίζα $x = 1$ ίνε κε ρίζα τις εκςίςοςις (2). Επιδι το ίδιο αχριβος ςιμβένι κε με κάθε άλι ρίζα τις εκςίςοςις (1), γι' αφτο ςιμπερένυμε, πος κ ά θ ε ρίζα τις εκςίςοςις (1) ίνε κε ρίζα τις εκςίςοςις (2).

β) Ας ιποθέςυμε τόρα, πος ι εκςίςοςι (2) έχι μια κάπια ρίζα, λ. χ., $x = 2$. Αφτο ςιμένι, πος αν ςτι θέςι τυ x βάζαμε το 2, τότε τα γινόμενα $(x^2 + 2)m$ κε $3xm$ θα γινόντανε ίςα (καθένα απ' αφτα θα γινότανε ίςο με τον αριθμο $6m$). Σε τέτια όμος περίπτοςι, αν ίνε $x = 2$ κ' ι παραςτάςις $x^2 + 2$ κε $3x$ θα γινόντανε ίςες, επιδι όπος κςέρυμε, αν ι ίςι αριθμι ($6m$ κε $6m$) διερεθύνε μ' ένα κε τον ίδιο αριθμο m, πυ δεν ίνε ίςος με το μιδενικο, θα προκίπςυν ίςι αριθμι. Επομένος, ι ρίζα $x = 2$ καθος κε καθεμια άλι ρίζα τις εκςίςοςις (2), ίνε κε ρίζα τις εκςίςοςις (1). Για το λόγο αφτο ι εκςιςόςις αφτες ίνε ιςοδίναμες.

Ας ιποθέςυμε τόρα, πος ο αριθμος m, με τον οπίο πολαπλαςιάςαμε κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις, ί ν ε ί ς ο ς μ ε τ ο μ ι δ ε ν ι κ ο. Πολαπλαςιάςαμε λ. χ. επι το μιδενικο τα μέλι τις εκςίςοςις $x^2 + 2 = 3x$, πυ έχι διο ρίζες: 1 κε 2. Θάχυμε τότε κενύργια εκςίςοςι:

$$(x^2 + 2) \cdot 0 = 2x \cdot 0.$$

Τιν εκςίςοςι αφτι αλιθέβυν όχι μονάχα το 1 κε το 2, μα κε κάθε άλι τιμι, πυ θα δοθι ςτο x. Βάζοντας λ.χ., ςτι θέςι τυ x τυς αριθμυς 5, 6 κ. τ. λ. θάχυμε:

$$(5^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 5 \cdot 0, \qquad (6^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 6 \cdot 0,$$

διλ.

$$27 \cdot 0 = 15 \cdot 0, \qquad 38 \cdot 0 = 18 \cdot 0,$$

ίτε

$$0 = 0, \qquad 0 = 0$$

(επιδι το γινόμενο κάθε αριθμυ επι το μιδενικο ίνε κι αφτο μιδενικο). Επομένος, ι εκςιςόςις δεν παραμένυν ιςοδίναμες κε όταν πολαπλαςιάζοντε επι το μιδενικο.

Απ' όςα ίπαμε παραπάνο βγάζυμε το ακόλυθο ςιμπέραζμα: **αν κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις τα πολαπλαςιάςυμε ίτε τα διερέςυμε μ'ένα κε τον ίδιο αριθμο (πυ δεν ίνε ίςος με το μιδενικο), θάχυμε κενύργια εκςίςοςι, ιςοδίναμι με τιν πρότι.**

85. **Πορίζματα.** Ι δέφτερι ιδιότιτα τον εκςιςόςεον, ι αλίθια τις οπίας φάνικε απ' όςα αναφέραμε παραπάνο, μας επιτρέπι να βγάζυμε τ' ακόλυθα τρία πορίζματα:

1. **Με τον κινο παράγοντα, πυ δεν ίνε ίςος με το μιδενικο κε δεν περιέχι άγνοςτυς, μπορύμε να διερέςυμε όλυς τυς όρυς τις εκςίςοςις.** Λ.χ.:

$$60x - 160 = 340 - 40x.$$

Διερόντας όλυς τυς όρυς με το 20, θάχυμε εκςίςοςι πιο απλι:

$$3x - 8 = 17 - 2x.$$

2. **Μπορύμε να εκςαλίπςυμε τυς παρονομαςτες όλον τον όρον τις εκςίςοςις.** Λ.χ.:

$$\frac{7x-3}{6} - \frac{x-5}{4} = \frac{43}{6}.$$

Κάνυμε όλα τα κλάζματα ομόνιμα:

$$\frac{14x-6}{12} - \frac{3x-15}{12} = \frac{86}{12},$$

ί

$$\frac{14x-6-(3x-15)}{12} = \frac{86}{12}.$$

Πολαπλαςιάζοντας όλυς τυς όρυς επι το 12, θάχυμε εκςίςοςι ιςοδίναμι με τι δομένι:

$$14x - 6 - (3x - 15) = 86, \text{ ί } 14x - 6 - 3x + 15 = 86.$$

3. **Μπορύμε ν' αλάκςυμε τα ςιμία όλον τον όρον τις εκςίςοςις με τα αντίθετά-τυς,** γιατι ίνε το ίδιο ςαν να πολαπλαςιάζαμε κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις επι το -1. Πολαπλαςιάζοντας λ.χ. επι το -1 κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις $-8 - x^2 = -7 + 2$, θάχυμε: $8 + x^2 = 7 - 2$.

86. Πολαπλαςιαζμος ί διέρεςι κε τον διο μελον τις εκςίςοςις επι μια κε τιν ίδια αλγεβρικι παράςταςι. Για να μεταςχιματίςυμε μια κάπια εκςίςοςι, παρυςιάζετε πολες φορες ανάνκι να πολαπλαςιάςυμε (ί να διερέςυμε) κε τα διό-τις μέλι με μια κε τιν ίδια αλγεβρικι παράςταςι (ςτιν παρακάτο παράγραφο θα τίχυμε παρόμια παραδίγματα). Ι εκςίςοςι, πυ θα προκίπςι ίςτερα απ' τον πολαπλαςιαζμο, θάνε ιςοδίναμι με τι δομένι ςε περίπτοςι, πυ ι αλγεβρικι παραςτάςι με τιν οπία πολαπλαςιάςαμε (ί διερέςαμε) κε τα διο μέλι τις δομένις εκςίςοςις, δεν ίνε ί ς ι μ ε τ ο μ ι δ ε ν ι κ ο. Ι νέες εκςιςόςις, πυ προκίπτυν απ'τις πρότες, αν πολαπλαςιαςτυν κε τα διό-τυς μέλι επι το μιδενικο, δεν ίνε ιςοδίναμες μ' αφτες.

87. Κςένες ρίζες. Διο μέλι τις εκςίςοςις παρυςιάζετε ανάνκι να τα πολαπλαςιάςυμε επι μια κε τιν ίδια αλγεβρικι παράςταςι, όταν λίνυμε εκςίςοςι, πυ περιέχι κλάζματα, ι παρανομαςτες τον οπίον έχυν άγνοςτο. Ας ιποθέςυμε λ.χ., πος θέλυμε να λίςυμε τιν εκςίςοςι:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2^2)}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}. \qquad (1)$$

Ο κινος παρονομαςτις όλον τον κλαζμάτον αφτον ίνε, όπος έφκολα θα καταλάβατε, το $(x-2)^2$. Τρέποντας τα κλάζματα αφτα ςε ομόνιμα, θάχυμε:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}.$$

Εκςαλίφοντας τον κινο παρονομαςτι, πολαπλαςιάζοντας διλ. μ' άλα λόγια, όλυς τυς όρυς επι το $(x-2)^2$, θάχυμε:

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

διλ.

$$x^2+2=3x. \qquad (2)$$

Ι εκςίςοςι αφτι έχι διο ρίζες: 1 κε 2. Εμις όμος δεν μπορύμε νάμαςτε βέβει, πος κ' ι διο αφτες ρίζες ίνε κατάλιλες κε για τιν προταρχικι εκςίςοςι, επιδι κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις αφτις τα πολαπλαςιάςαμε επι τιν παράςταςι $(x-2)^2$ πυ, όπος βλέπυμε, γίνετε ίςι με το μιδενικο ςε περίπτοςι, πυ θάνε $x=2$, (ι εκςιςόςις, πυ προκίπτυν απ' τις πρότες, όταν αφτες πολαπλαςιαςτύνε με το μιδενικο, δεν ίνε ιςοδίναμες με κίνες, πυ ίχαμε).

Πρέπι λιπον να δοκιμάςυμε τις ρίζες, 1 κε 2 πυ βρίκαμε, με

ςχοπο να εχςαχριβόςυμε, αν ίνε χατάλιλες χε για τιν εχςίςοςι (1), όπος ίνε χε για τιν εχςίςοςι (2). Ι ρίζα $x = 1$ αλιθέβι τιν εχςίςοςι (1):

$$\frac{1^2}{(1-2)^2} + \frac{2}{(1-2)^2} = \frac{1}{1-2} + \frac{2 \cdot 1 + 2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2} + \frac{2}{(-1)^2} = \frac{1}{-1} + \frac{2+2}{(-1)^2},$$

$$1 + 2 = -1 + 4, \quad \text{διλ. } 3 = 3.$$

Ι άλι όμος ρίζα, $x = 2$, ίνε αχατάλιλι για τιν εχςίςοςι (1), επιδε ςε παρόμια περίπτοςι ι εχςίςοςι δεν έχι χαμια ένια:

$$\frac{4}{0} + \frac{2}{0} = \frac{1}{0} + \frac{6}{0}$$

(ι διέρεςι με το μιδενιχο ίνε αδίνατι).

Οπος λιπον βλέπυμε, ςε περίπτοςι, πυ εχςαλίφυμε τυς παρονομαςτες τον όρον μιας εχςίςοςις, ίνε ανάνχι, αν ι παρανομαςτες αφτι έχυν άγνοςτυς, ίςτερα απ' τιν έβρεςι τον ριζον, να χάνυμε δ ο χ ι μ ι με ςχοπο να εχςαχριβόςυμε, αν βρίςχυντε γιά όχι ανάμεςα ςτις ρίζες χε χςένες (ρίζες διλ., πυ δεν ανίχυντε ςτιν πρότι εχςίςοςι).

Τυναντίο, διερόντας χε τα διο μέλι τις εχςίςοςις με μια χάπια αλγεβριχι παράςταςι, πυ έχι άγνοςτο, ιπάρχι χίντινος να χάςυμε μεριχες ρίζες.

Διερόντας λ.χ. χε τα διο μέλι τις εχςίςοςις:

$$(2x + 3)\ (x - 3) = (3x - 1)\ (x - 3)$$

με το $(x - 3)$, θάχυμε χενόργια εχςίςοςι.

$$2x + 3 = 3x - 1,$$

πυ δε θάνε ιςοδίναμι με τιν πρότι, εχςετίας πυ έχι μια μόνι ρίζα $x = 4$, ενο ι πρότι έχι διο ρίζες: $x = 4$ χε $x = 3$.

II. Εχςιςόςις με έναν άγνοςτο.

88. Λίςι εχςιςόςεον πρότυ βαθμυ με ένα άγνοςτο. Πάνο ςτα αχόλυθα διο παραδίγματα θα δίχςυμε τον τρόπο τις λίςις εχςιςόςεον πρότυ βαθμυ με έναν άγνοςτο.

1. Να λιθι ι εχςίςοςι:

$$3x + 2\ (4x - 3) = 5\ (x + 2) - 4.$$

Εxςαλίφοντας τις παρενθέςις, θάχυμε:

$$3x + 8x - 6 = 5x + 10 - 4.$$

Μεταφέρυμε τόρα τυς όρυς, πυ έχυν τον άγνοςτο ςτο αριςτερο μέλος χε τυς γνοςτυς όρυς ςτο δεχςιο (κίτ. το πόριζμα τις πρότις ιδιότιτας τον εχςιςόςεον):

$$3x + 8x - 5x = 10 - 4 + 6.$$

Κάνυμε αναγογι τον όμιον όρον:

$$6x = 12.$$

Τέλος διερύμε χε τα διο μέλι τις εχςίςοςις με το 6 (ςτιριζόμενι ςτι δέφτερι ιδιότιτα τον εχςιςόςεον). Το τελικο εχςαγόμενο θάνε:

$$x = 2.$$

Για να καταπιςθύμε ότι δεν κάνυμε κανένα λάθος ςτι λίςι τις εχςίςοςις, κάνυμε δ ο κ ι μ ι τ ι ς λ ί ς ι ς. Για το λόγο αφτο αντικαταςτένυμε ςτι δομένι εχςίςοςι το x με τι ρίζα πυ βρίκαμε, κάνυμε τις πράχςις πυ ςιμιόνυντε ςτιν εχςίςοςι χε αν ι εχςίςοςι μετατραπι ςε ταφτότιτα θα πι πος ι ρίζα βρέθικε ςοςτα. Στο παράδιγμα, πυ αναφέραμε, θάχυμε:

$$3 \cdot 2 + 2\,(4 \cdot 2 - 3) = 5\,(2 + 2) - 4,$$

ίτε

$$16 = 16.$$

Επομένος ι λίςι ίνε ςοςτι.

2. Να λιθι ι εχςίςοςι:

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{3x+2}{5} - x = \frac{7x-6}{6} - 1.$$

Ανάγυμε όλυς τυς όρυς ςτον κινο παρανομαςτι, πυ ίνε ίςος με το 30.

$$\frac{15(3x-4)}{30} + \frac{6\,(3x+2)}{30} - \frac{30x}{30} = \frac{5(7x-6)}{30} - \frac{30}{30}.$$

Πολαπλαςιάζυμε όλυς τυς όρυς τις εχςίςοςις επι το 30 (εχςαλίφυμε μ' άλα λόγια τυς παρονομαςτες).

$$15(3x - 4) + 6(3x - 2) - 30x = 5(7x - 6) - 30.$$

Εχςαλίφυμε τις παρενθέςις:

$$45x - 60 + 18x + 12 - 30x = 35x - 30 - 30.$$

Μεταφέρυμε τυς άγνοςτυς όρυς τις εκςίςοςις ςτο αριςτερο μέλος κε τυς γνοςτυς όρυς ςτο δεξιο:

$$45x + 18x - 30x - 35x = 60 - 12 - 30 - 30.$$

Κάνυμε αναγογι τον όμιον όρον:

$$-2x = -12.$$

Διερύμε κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις με το ςιντελεςτι τυ άγνοςτυ (μπορύςαμε ςτιν αρχι να τα πολαπλαςιάςυμε επι το -1 για να να γίνυνε θετιχα).

$$x = \frac{-12}{-2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Κάνυμε τι δοχιμι:

$$\frac{3 \cdot 6 - 4}{2} + \frac{3 \cdot 6 + 2}{5} - 6 = \frac{7 \cdot 6 - 6}{6} - 1,$$

$$7 + 4 - 6 = 6 - 1, \qquad 5 = 5.$$

Ι λίςι ίνε ςοςτι.

Απ' τα παραπάνο παραδίγματα βλέπυμε, ότι για τι λίςι εκςίςοςις πρότυ βαθμυ με ένα άγνοςτο πρέπι:

1. Να εκςαλίπςυμε τυς παρονομαςτες, αν ιπάρχυν τέτιι.

2. Να εκςαλίπςυμε τις παρενθέςις.

3. Να χορίςυμε τυς γνοςτυς απ' τυς άγνοςτυς, μεταφέροντας κίνυς, πυ έχυν τον άγνοςτο όρο ςτο αριςτερο μέλος τις εκςίςοςις κε τυς άλυς, ςτο δεκςιο.

4. Να κάνυμε αναγογι τον όμιον όρον.

5. Να διερέςυμε κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις με το ςιντελεςτι τυ άγνοςτυ.

Ιςτερα πρέπι να κάνυμε τιν επαλίθεπςι, αντιχαταςτένοντας τον άγνοςτο με τιν τιμί-τυ.

Εφχολα μπορι καθίς-μας να καταλάβι, πος για όλα τα ίδι τον εκςιςόςεον δεν παρυςιάζετε ανάνκι να γίνυν όλες ι πέντε εργαςίες, πυ ιποδίχςαμε παραπάνο.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ιςτερα απ' το τέλος τον τεςάρον πρότον εργαςιον θα μίνι ςτο χάθε μέλος τις εκςίςοςις απο ένας όρος: ςτο αριςτερο, ο όρος πυ έχι τον άγνοςτο κε ςτο δεκςιο, ο γνοςτος

όρος. Ι γενιxι μορφι, πυ θα πάρι ι εxςίςοςι ςτιν περίπτοςι αφτι, θἄνε:

$$ax = b.$$

Ι αριθμι a xε b μπορύνε νἄνε θετιxι, αρνιτιxι xι αxόμα ίςι με το μιδενιxο. Ι εxςίςοςι τυ ίδυς αφτυ, ονομάζετε xανονιxι μορφι τον εxςιςόςεον τυ πρότυ βαθμυ, πυ έχυν έναν άγνοςτο.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Να λιθυν ι αxόλυθες εxςιςόςις:

150. $2x + 1 = 35$, $\quad 19 = 4 + 3y$, $\quad 7y - 11 = 24$.

151. $3x + 23 = 104$, $\quad 89 = 11y - 10$, $\quad 38 = 2 + 3x$.

152. $3x = 15 - 2x$, $\quad 4x - 3 = 9 - 2x$, $5x + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$.

153. $2{,}5x - 0{,}86 = 4 + 0{,}7x$, $\quad 29 + 2x = (x - 7) \cdot 3$.

154. $x - 7 - \frac{3x + 13}{20}$, $\quad -x = 3$, $\quad -2x - 8$.

155. $\frac{2x + 1}{2} = \frac{7x + 5}{8}$, $\quad x + \frac{11 - x}{3} = \frac{20 - x}{2}$.

156. $x + \frac{3x - 9}{5} = 11 - \frac{15x - 12}{3}$.

157. $3x - 4 - \frac{4(7x - 9)}{15} = \frac{4}{5}\left(6 + \frac{x - 1}{3}\right)$.

158. $2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}$.

159. $\frac{x - 1}{7} + \frac{23 - x}{5} = 2 - \frac{4 + x}{4}$.

89. Ενια ςχιματιζμυ εxςιςόςεον. Με τι βοίθια τον εxςιςόςεον μπορυν ςχετιxα πιο έφxολα να λίνοντε προβλίματα, πυ ίνε δίςxολο, xε πολες φορες μάλιςτα xι αδίνατο, να λιθύνε με το ςινιθιζμένο αριθμιτιxο τρόπο. Ολι ι διςxολία ένxιτε ςτο πός να ςχιματιςθι τέτια εxςίςοςι, ι λίςι τις οπίας να δόςι τι ζιτύμενι απάντιςι. Κανένας γενιxος τρόπος για το ςχιματιζμο τον εxςιςόςεον δεν ιπάρχι, εxςετίας πυ ι όρι τον προβλιμάτον μπορύνε νἄνε πολιπίxιλι. Μπορύμε μονάχα να ιποδίxςυμε μεριxυς γενιxυς τρόπυς τυ ςχιματιζμυ τον εxςιςόςεον απ' τα δομένα προβλίματα. Στις περιςότερες περίπτοςις θα μας βοιθίςυνε ςτο ςxοπο αφτο ι ςιχνες αςxίςις x' ι πίρα.

Θα αναφέρυμε τόρα πάνο ς' ένα παράδιγμα τυς γενικυς τρόπυς, τυ σχιματιζμυ τον εξισόσεον.

Πρόβλιμα. Ενα ςχολιο αγόραςε χοντρα κε λεπτα τετράδια, 80 το όλο. Κάθε ένα απ' τα χοντρα τετράδια κόςτιζε 35 καπ. κε κάθε ένα απ' τα λεπτα 4 καπ. Πόςα τετράδια αγοραςτίκανε απ' το κάθε ίδος, αν ίνε γνοςτο, πος για όλα πλιρόθικαν 9 ρύβλ. κε 40 καπ.;

1. Ο ρ ί ζ υ μ ε π ι ό α π' τ α ά γ ν ο ς τ α μ ε γ έ θ ι θ α π α ρ α ς τ ί ς υ μ ε μ ε τ ο x.

Στο πρόβλιμά-μας έχυμε διο άγνοςτυς: τον αριθμο τον χοντρον τετραδίον κε τον αριθμο τον λεπτον. Ας παραςτίςυμε εμις με το x τον αριθμο τον χοντρον τετραδίον. Επιδι όλα τα τετράδια ίνε 80, γι' αφτο λεπτα θάνε $80 - x$.

Ο αριθμος τον χοντρον τετραδίον ίνε x
„ „ „ λεπτον „ „ $80 - x$.

2. Π α ρ α ς τ έ ν υ μ ε μ ε μ α θ ι μ α τ ι κ ο τ ρ ό π ο μ ε τ ι β ο ί θ ι α τ υ x κ ε τ ο ν δ ο μ έ ν ο ν α ρ ι θ μ ο ν ό λ υ ς τ υ ς ό ρ υ ς τ υ π ρ ο β λ ί μ α τ ο ς.

Στο πρόβλιμά-μας αναφέρετε, πος το χοντρο τετράδιο κοςτίζι 35 καπ. κε το λεπτο 4 καπ. Επομένος, μπορι να δοθι ερότιςι, πόςο κοςτίζαν όλα τα τετράδια (παρόμια ερότιςι δίνετε, εκςετίας, πυ ςτο πρόβλιμα αναφέρετε το κόςτος όλον τον τετραδίον).

Το κόςτος τον χοντρον τετραδίον ίνε $35x$
„ „ „ λεπτον „ „ $4\ (80 - x)$ καπ.
Το ολικο κόςτος τον τετραδίον „ 9 ρύβλ. 40 καπ.

3. Σ χ ι μ α τ ί ζ υ μ ε ε ξ ί ς ο ς ι.

Επιδι ςτο πρόβλιμα αναφέρετε, πος το ολικο κόςτος τον τετραδίον ίνε 9 ρύβλ. κε 40 καπ., γι' αφτο το άθριςμα τυ κόςτυς τον χοντρον τετραδίον $35x$ κε τον λεπτον $4(80 - x)$ πρέπι νάνε ίςο με 9 ρύβλ. κε 40 καπ.

$$35x + 4(80 - x) = 940.$$

Λίνοντας τιν εξίςοςι αφτι βρίςκυμε $x = 20$.

Με το x παραςτίςαμε τον αριθμο τον χοντρον τετραδίον. Επομένος, χοντρα τετράδια αγοράςτικαν 20 κε λεπτα

$$80 - 20 = 60 \text{ τετράδια.}$$

Πρέπι να ςιμιοθι, πος ςτα προβλίματα τα δομένα ίνε ςινίθος τόςα, όςα μας χριάζυντε για το ςχιματιζμο εξίςοςις. Για το λόγο

αφτο, σχιματίζοντας εκσίσοσι, ίνε καλο να εκσετάσυμε, αν χρισιμοπιυθίκανε όλα τα δομένα τυ προβλίματος.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

160. Το άθριζμα διο αριθμον ίνε 2548. Να βρεθυν ι αριθμι αφτι, αν ίνε γνοστο, πος ο ένας απ' αφτυς ίνε μικρότερος απ' τον άλο κατα 148.

161. Το άθριζμα τριον αριθμον ίνε 100. Ο δέφτερος προσθετέος ίνε μεγαλίτερος απ' τον πρότο κατα 10 κι ο τρίτος προσθετέος μεγαλίτερος απ' τον δέφτερο κατα 20. Να βρεθυν ι αριθμι αφτι.

162. Ενας καβαλάρις κινιγα έναν πεζο, πυ βρίσκετε 15 χμ μακρια απ' αφτον. Ιστερα απο πόσες όρες ο καβαλάρις θα φτάσι τον πεζο, αν ίνε γνοστο πος ο πρότος κάθε όρα περνάι 10 χμ κι ο δέφτερος μονάχα 4 χμ;

163. Απο τσάι διο πιοτίτον κάνανε μίγμα 32 χγ. Κάθε χιλιόγραμο τσάι τις πρότις πιότιτας κοστίζι 8 ρύβλια κε κάθε χιλιόγραμο τσάι τις δέφτερις πιότιτας 6 ρύβλ. κε 50 καπ. Πόσα χιλιόγραμα πίρανε απ' το τσάι καθεμιας πιότιτας, αν ίνε γνοστο, πος το χιλιόγραμο τυ μίγματος (χορις κέρδος κε ζιμία) κοστίζι 7 ρύβλ. κε 10 καπ;

164. Ενας ποδιλατιστις πέρασε κάπια απόστασι με ταχίτιτα 8 χμ τιν όρα. Ο ποδιλατιστις αφτος έπρεπε να επιστρέψι απο άλο δρόμο, πυ ίτανε κατα 3 χμ μακρίτερος απ' τον πρότο. Αν κε στιν επιστροφί-τυ το ποδίλατο πίγενε με ταχίτιτα 9 χμ τιν όρα, εκσόδεψε οστόσο για τιν επιστροφι $7\frac{1}{2}$ λεφτα παραπάνο. Πόσο μάκρος ίχε ο καθένας απ' τυς διο δρόμυς;

90. Εκσισόσις με γράματα.

Δεν ιπάρχι καμια ανάνκι να παραστιθι ο άγνοστος πάντοτε με τον γράμα x. Ο άγνοστος μπορι να παραστιθι κε με ένα οπιοδίποτε άλο γράμα. Ας πάρυμε λ.χ. τον τίπο:

$$s = \frac{1}{2}bh.$$

Ο παραπάνο τίπος παραστένι το εμβαδο s τριγόνυ, πυ έχι βάσι ίσι με b με μονάδες μάκρος κε ίπσος ίσο με h παρόμιες μονάδες. Ο τίπος αφτος παραστένι εκσίσοσι. Κάθε αριθμος τις εκσίσοσις αφτις s, b κε h μπορι να παρθι ος άγνοστος. Ας ιποθέσυμε λ.χ., πος μας δίνετε το παρακάτο πρόβλιμα: Να βρεθι ι βάσι τυ τριγόνυ, το ίπσος τυ οπίυ ίνε ίσο με h μονάδες μάκρυς (οπιεσδίποτε). Στιν περίπτοσι αφτι ο αριθμος b τυ τίπυ-μας πέρνετε ος άγνοστος κ' ι αριθμι s κε h, ος γνοστι. Ι άγνοστι βάσι μπορι βέβεα να παραστιθι κε με το x. Ι εκσίσοσί-μας τότε θα πάρι τιν ακόλυθι μορφι:

$$s = \frac{1}{2}hx,$$

Απ' αφτο βρίςκουμε:

$$x = s : \frac{1}{2} h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Μπορύμε όμος κε χορις καθόλου ν' αντικαταςτίςουμε το b με το x να βρύμε κατεφθία απ'τιν εκςίςοςι $s = \frac{1}{2} bh$ τιν τιμι του b ςε ςχέςι με το s κε h:

$$s = \frac{1}{2} bh,\ 2s = bh,\ b = \frac{2s}{h}.$$

Γενικα, πρέπι να εκςαςκιθύμε να λίςουμε όχι μονάχα αριθμιτικες εκςιςόςις, διλ. που ι δομένι αριθμι παραςτένουντε με πςιφία κι ο άγνοςτος με το x, μα κε εκςιςόςις με γράματα διλ. τέτιες, που ι δομένι αριθμι ος κι ο άγνοςτος παραςτένουντε μ'ένα οπιοδίποτε γράμα.

Παραδίγματα.

1. $a + bx = c,$

$bx = c - a,$

$x = \frac{c - a}{b}.$

2. $a(x - c) = b(x + d),$

$ax - ac - bx + bd,$

$ax - bx = bd + ac,$

$x(a - b) = bd + ac,$

$x = \frac{bd + ac}{a - b}.$

3. $\frac{y}{a} - y = b,$

$y - ay = ab,$

$y(1 - a) = ab,$

$y = \frac{ab}{1 - a}.$

4. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1,$

$bx + ax = ab,$

$x(b + a) = ab,$

$x = \frac{ab}{a + b}.$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

165. $(a + x)\ (b + x) = (a - x)\ (b - x).$

166. $(x - a)\ (x + b) + c = (x + a)\ (x - b).$

167. Απ' τιν εκςίςοςι $a + bx = 4 - 3(a - x)$ να βρεθι το x, ςε εκςάρτιςι με το a κε το b.

168. Ι επιφάνια q ενος τραπεζιυ, πυ έχι βάςις ίςες με b_1 κε b_2 κε ίπςος h, καθορίζετε με τον τίπο: $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Βρέςτε το h αντίςτιχα με το q, b_1 κε b_2.

III. Σιςτίματα εκςιςόςεον πρότυ βαθμυ.

Σίςτιμα διο εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς.

91. Πρόβλιμα. Κράμα 148 **χγ** απο αςίμι κε χαλκο, βρέθικε με τι βοίθια τον πιραμάτον, πος χάνι μέςα ςτο νερο απ' τα βάρος-τυ $14\frac{2}{3}$ **χγ**. Να βρεθι, πόςος χαλκος κε πόςο αςίμι περιέχετε ςτο κράμα αφτο, αν ίνε γνοςτο, πος 21 **χγ** αςίμι χάνι απ' το βάρος-τυ μέςα ςτο νερο 2 **χγ** κε 9 **χγ** χαλκος χάνι 1 **χγ**.

Ας ιποθέςυμε, πος το κράμα αφτο περιέχι x χιλιόγραμα αςίμι κε y χιλιόγραμα χαλκο. Τότε ι μια απ' τις εκςιςόςις θἄνε:

$$x + y = 148.$$

Για να ςχιματίςυμε κε δέφτερι εκςίςοςι, ςκεφτόμαςτε έτςι: Αν τα 21 χιλιόγραμα αςίμι χάνυνε μέςα ςτο νερο 2 **χγ** απ' το βάρος-τυς, τότε το 1 **χγ** αςίμι θα χάςι $\frac{2}{21}$ **χγ** κε τα x **χγ** $\frac{2}{21}x$ χιλιόγραμα.

Για τον ίδιο, ακριβος, λόγο, αν τα 9 **χγ** χαλκος χάνυνε μέςα ςτο νερο 1 **χγ**, τότε το 1 **χγ** χαλκος θα χάςι $\frac{1}{9}$ **χγ** κε τα y χιλιόγραμα $\frac{1}{9}y$ χιλιόγραμα. Επομένος, ι δέφτερι εκςίςοςι θἄνε:

$$\frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Εχυμε λιπον 'τόρα διο εκςιςόςις με διο άγνοςτυς:

$$x + y = 148 \text{ κε } \frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3} = \frac{44}{3}.$$

Ι δέφτερι εκςίςοςι μπορι ν' απλοπιιθι, αν εκςαλίπςυμε τυς παρονομαςτες τον όρον-τις. Για το ςκοπο αφτο κάνυμε τα κλάςματα ομόνιμα:

$$\frac{6}{63}x+\frac{7}{63}y=\frac{924}{63}.$$

Για να εκςαλιφθυν ι παρονομαςτες, πολαπλαςιάζυμε κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις επι το 63. Ι εκςίςοςι, πυ θάχυμε, θάνε ιςοδίναμι με τιν προιγύμενι:

$$6x+7y=924.$$

Εχυμε λιπον τόρα διο εκςιςόςις:

$$x+y=148 \text{ κε } 6x+7y=924.$$

Τις εκςιςόςις αφτες μπορύμε να τις λίςυμε με διάφορυς τρόπυς. Καθορίζυμε λ.χ. τιν τιμι τυ x ςχετικα με το y απ' τιν πρότι εκςίςοςι.

$$x=148-y.$$

Επιδι κε ςτι δέφτερι εκςίςοςι τα γράματα x κε y παραςτένυν τυς ίδιυς αριθμυς, τυς οπίυς παραςτένυν κε ςτιν πρότι εκςίςοςι, γι' αφτο μπορύμε ςτι δέφτερι εκςίςοςι να βάζυμε ςτι θέςι τυ x τι διαφορα $148-y$:

$$6(148-y)+7y=924.$$

Λίνυμε τιν εκςίςοςι αφτι ος προς το y:

$$888-6y+7y=924, \quad y=924-888=36.$$

Τότε θάνε:

$$x=148-36=112.$$

Το χράμα λιπον πυ ίχαμε, όπος βλέπυμε, περιέχι 112 **χγ** αςίμι κε 36 **χγ** χαλκο.

92. Κανονικι μορφι εκςίςοςις πρότυ βαθμυ με διο άγνοςτυς. Ας πάρυμε ος παράδιγμα τιν ακόλυθι εκςίςοςι με διο άγνοςτυς:

$$2(2x+3y-5)=\frac{5}{8}(x+3)+\frac{3}{4}(y-4).$$

Για ν' απλοπιιθι ι εκςίςοςι αφτι, ας κάνυμε τυς ίδιυς μεταςχιματιζμυς, πυ ιποδίκςαμε παραπάνο, διλ.:

1. Ας εκςαλίπςυμε τις παρενθέςις:

$$4x+6y-10=\frac{5}{8}x+\frac{15}{8}+\frac{3}{4}y-3.$$

2. Ας εκςαλίπςυμε τυς παρονομαςτες, πολαπλαςιάζοντας επι 8 όλυς τυς όρυς:

$$32x + 48y - 80 = 5x + 15 + 6y - 24.$$

3. Ας μεταφέρυμε τυς γνοςτυς όρυς στο ένα μέλος τις εχςίσοςις χε τυς άγνοςτυς ςτ' άλο:

$$32x + 48y - 5x - 6y = 15 - 24 + 80.$$

4. Ας χάνυμε αναγογι τον όμιον όρον:

$$27x + 42y = 71.$$

Ι εχςίςοςι θα πάρι τιν παραπάνο μορφι ίςτερα απ' όλυς τυς δινατυς μετασχιματιζμυς. Οπος βλέπυμε, στο αριςτερο μέλος τις εχςίςοςις, βρίςχυντε μονάχα διο όρι, ο ένας με τον άγνοςτο x (στιν πρότι δίναμι) χε ο άλος με τον άγνοςτο y (στιν πρότι δίναμι). Το δεχςιο μέλος τις εχςίςοςις αποτελίτε μονάχα απο έναν όρο, πυ δεν έχι άγνοςτυς. Ι ςιντελεςτες τυ x χε τυ y μπορύνε νάνε χε ι διο θετιχι (όπος στο παράδιγμα, πυ πίραμε) ί χε ι διο αρνιτιχι (ι περίπτοςι αφτι, μπορι να ςινταφτιςτι με τιν προιγύμενι, αν πολαπλαςιαςτυν όλι ι όρι τις εχςίςοςις επι το -1) ί ο ένας θετιχος χι ο άλος αρνιτιχος. Ο αριθμος, πυ βρίςχετε ςτο δεχςιο μέλος τις εχςίςοςις, μπορι νάνε θετιχος (όπος στο παράδιγμά-μας), ί αρνιτιχος ί αχόμα χε μιδενιχο. Παραςτένοντας τυς ςιντελεςτες τον άγνοςτον x χε y με τα γράματα a χε b χε τον όρον, πυ δεν περιέχι άγνοςτυς, με το γράμα c, θα δόςυμε στιν εχςίςοςι με διο άγνοςτυς τι γενιχι μορφι:

$$ax + by = c.$$

Τέτια μορφι εχςίςοςις, ονομάζετε **χανονιχι** μορφι εχςίςοςις πρότυ βαθμυ με διο άγνοςτυς.

93. Αόριςτες εχςιςόςις με διο άγνοςτυς. Μια εχςίςοςι με διο άγνοςτυς έχι άπιρο πλίθος ριζον. Κε πραγματιχα, αν ς' ένα χάπιο απ' τυς άγνοςτυς δόςυμε μια οπιαδίποτε τιμι, χε βάζυμε στι θέςι τυ άγνοςτυ τιν τιμι αφτι, τότε θάχυμε εχςίςοςι μ' ένα δέφτερο άγνοςτο, πυ θα μπορέςυμε να τονε βρύμε απ' τιν εχςίςοςι αφτι. Αν δόςυμε ίςτερα στον πρότο άγνοςτο μια χάπια άλι τιμι, θα βρύμε νέα τιμι για το δέφτερο χ.τ.λ. Οπος λιπον βλέπυμε, θάχυμε άπιρο πλίθος λίςεον.

Ας ιποθέςυμε λ. χ., πος μας δίνετε παρόμιο πρόβλιμα: Να βρεθυν ι πλεβρες ενος ιςοςχελιχυ τριγόνυ, ι περίμετρος τυ οπίυ ίνε ίςι με 40 **μ.** Παραςτένοντας το μάχρος τις βάςις τυ τριγόνυ αφτυ με το γράμα x χε το μάχρος χαθεμιας απ' τις πλαινές-τυ πλεβρες

με το γράμα y, μπορύμε να γράπςυμε τιν εκςίςοςι: $x+2y=40$.

Ας δόςυμε ςτο x μια κάπια τιμι, λ. χ. 10. Τότε θἄχυμε: $10+2y=40$, $2y=30$, $y=15$. Επομένος, αν ι βάςι τυ τριγόνυ ίνε 10 **μ**, τότε καθεμια απ' τις ίςες-τυ πλεβρες πρέπι νἄνε 15 **μ**. Ας δόςυμε τόρα ςτο x μια κάπια άλι τιμι, λ.χ. 8. Τότε $2y=32$ κε $y=16$. Επιδι, όπος βλέπυμε, μπορύμε νἄχυμε όςες θέλυμε λίςις, γι' αφτο ςιμπερένυμε, πος ι εκςίςοςι καθος κε το πρόβλιμάμας θἄνε αόριςτα.

94. Σίςτιμα εκςιςόςεον. Σίςτιμα εκςιςόςεον ονομάζυμε το ςίνολο διο ί κε περιςότερον εκςιςιςόςεον, τις οπίες αλιθέβυν ι ίδιες τιμες τον άγνοςτόν-τυς.

Αν λ. χ. ςτις παρακάτο εκςιςόςις.

$$\begin{cases} 2x-5=3y-2 \\ 8x-y=2y+21 \end{cases}$$

το γράμα x έχι μια κε τιν ίδια τιμι κε ςτις διο εκςιςόςις κε ςιμβένι το ίδιο κε με το γράμα y (έχι διλ. κι αφτο τιν ίδια τιμι κε ςτις διο), τότε ι εκςιςόςις αφτες αποτελυν ςίςτιμα. Ενα τέτιο γίνετε ςε περίπτοςι, πυ ι εκςιςόςις ςχιματίζυντε απ' τυς όρυς τυ ίδιυ προβλίματος.

Θα ιποδίκςυμε διο τρόπυς, με τυς οπίυς λίνυντε ςιςτίματα διο εκςιςόςεον πρότυ βαθμυ με διο άγνοςτυς.

95. Μέθοδος τις αντικατάςταςις. Τι μέθοδο αφτι τι χριςιμοπιίςαμε κε νορίτερα, όταν παρυςιάςτικε ανάνκι να λίςυμε το πρόβλιμα, όπυ αναφέραμε για το κράμα τυ αςιμιυ κε τυ χαλκυ.

Ας πάρυμε τόρα πιο πολίπλοκο παράδιγμα:

$$8x-5y=-16, \quad 10x+3y=17.$$

(Κε ςτις διο εκςιςόςις δόςαμε κανονικι μορφι.)

Απ' τι μια εκςίςοςι, λ.χ., απ' τιν πρότι, βρίςκυμε τιν τιμι ενος κάπιυ άγνοςτυ, λ.χ. τυ y ος προς τον άλο άγνοςτο:

$$y=\frac{8x+16}{5}.$$ [1]

Επιδι τι δέφτερι εκςίςοςι πρέπι να αλιθέπςυν ι ίδιες τιμες τον άγνοςτον, πυ αλιθέβυν κε τιν πρότι, γι' αφτο μπορύμε ν' αντι-

[1] Για να πάρυμε τον τίπο αφτο, μεταφέραμε τον όρο $-5y$ ςτο δεκςιο μέλος τις εκςίςοςις κε τον όρο -16 ςτ' αριςτερο. Διερέςαμε ίςτερα κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις με το 5 κε αλάκςαμε τις θέςις τον μελον τις εκςίςοςις. Τυς μεταςχιματιζμυς αφτυς πρέπι να εκςαςκιθύμε να κάνυμε απο μνίμις.

καταςτίςυμε ς' αφτι τον άγνοςτο y με τιν παράςταςι, πυ βρίκαμε. Θάχυμε τότε εκςίςοςι μ' έναν άγνοςτο, τον x:

$$10x + 3 \cdot \frac{8x+16}{5} = 17.$$

Λίνυμε τιν εκςίςοςι αφτι:

$$10x + \frac{24x+48}{5} = 17, \quad 50x + 24x + 48 = 85, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Τότε θάνε:

$$y = \frac{8x+16}{5} = \frac{4+16}{5} = 4.$$

Θα μπορέςυμε ακόμα να βρύμε απ' τι μια εκςίςοςι τον άγνοςτο x ος προς το y κε ν' αντικαταςτίςυμε αφτόνε ςτιν άλι εκςίςοςι με τιν παράςταςι, πυ βρίκαμε. Σε τέτια περίπτοςι θάχαμε εκςίςοςι με τον άγνοςτο y.

Τι μέθοδο αφτι τι χριςιμοπιύμε χιρίος, όταν ο ςιντελεςτις ενος κάπιυ άγνοςτυ ίνε ίςος με το 1. Σε τέτια περίπτοςι ίνε προτιμότερο να βρύμε τον άγνοςτο αφτο ος προς τον άλο άγνοςτο (δεν παρυςιάζετε ανάνκι να τόνε διερέςυμε με το ςιντελεςτι). Λ. χ.:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11, \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Απ' τι δέφτερι εκςίςοςι βρίςκυμε: $y = 22 - 4x$.

Τότε ι πρότι εκςίςοςι θα δόςι:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11, \ 3x - 44 + 8x = 11, \ 11x = 44 + 11 = 55$$

$$x = \frac{55}{11} = 5, \quad y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Κανόνας. Για να λίςυμε ςίςτιμα διο εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς, με τι μέθοδο τις αντικατάςταςις, πρέπι να βρύμε τιν τιμι ενος κάπιυ απ' τυς άγνοςτυς αφτυς, ος προς τον άλο άγνοςτο κε τιν παράςταςι, πυ θα προκίπςι, να τιν βάλυμε ςτιν άλι εκςίςοςι. Θάχυμε ςε τέτια περίπτοςι εκςίςοςι μ'ένα άγνοςτο. Λίνοντας τιν εκςίςοςι, βρίςκυμε τον άγνοςτο αφτον. Βάζοντας ίςτερα τον αριθμο αφτον ςτιν παράςταςι, πυ βρίκαμε νορίτερα για

τον πρότο άγνοςτο, βρίςκυμε κε το δέφτερο άγνοςτο.

96. Μέθοδος τις αλγεβρικις πρόςθεςις. Ας ιποθέςυμε στιν αρχι, πος το δομένο ςίςτιμα τον εκςιςόςεον (στις οπίες δόςαμε νορίτερα κανονικι μορφι) ι ςιντελεςτες ενος κάπιυ αγνόςτυ, λ. χ. τυ y, ίνε ίδιι. Μας δόθικε λ. χ. το ςίςτιμα:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33. \end{cases}$$

Ι ςιντελεςτες τυ άγνοςτυ y στο ςίςτιμα αφτο ίνε ι ίδιι κ' έχυν αντίθετα ςιμία. Επιδι, όπος κςέρυμε, αν στυς ίςυς αριθμυς προςθέςυμε (ί αφερέςυμε) ίςυς, θἄχυμε πάλι ίςυς αριθμυς, γι' αφτο μπορύμε νἄμαστε βέβει, πος ι ιςότιτα δε θα χαλάςι, αν προςθέςυμε (ί αφερέςυμε) χοριςτα τα δεκςια κε χοριςτα τ' αριςτερα μέλι τον εκςιςόςεον αφτον.

Εχοντας λιπον αφτο ιπόψι προςθέτυμε τις δομένες εκςιςόςις. Στιν περίπτοςι αφτι θα εκςαλιφτυν ι όρι $-2y$ κε $+2y$ κε θἄχυμε μια εκςίςοςι με τον άγνοςτο x:

$$+\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases}$$
$$\overline{12x \qquad = 60,} \text{ Επομένος: } x = 5.$$

Βάζοντας τόρα ςε μια απ' τις δομένες εκςιςόςις, αντις το x τιν τιμί-τυ 5, θἄχυμε εκςίςοςι, απ' τιν οπία θα βρύμε τιν τιμι τυ y:

$$7 \cdot 5 - 2y = 27, \quad 35 - 2y = 27, \quad 35 - 27 = 2y,$$
$$8 = 2y, \quad y = 4.$$

Αν στις εκςιςόςις, πριν να εκςαλιφθι ο ένας απ' τυς άγνοςτυς, ιπάρχυν όχι μονάχα ι ίδιι ςιντελεςτες, μα κε τα ίδια ςιμία, τότε αντικαταςτένυμε τα ςιμία όλον τον όρον τις μιας εκςίςοςις με τα αντίθετά-τυς κε εργαζόμαςτε κε πάλι με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο, όπος κε παραπάνο. Αν λ.χ. μας δίνετε το ςίςτιμα:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 3x + 7y = 32, \end{cases}$$

ενας απ' τυς αγνόςτυς τον εκςιςόςεον τυ οπίυ, ο x, έχι ίδιυς ςιντελεςτες κε ίδια ςιμία, αλάζυμε τα ςιμία όλον τον όρον τις μιας εκςίςοςις, λ. χ. τις πρότις, με τα αντίθετά-τυς (πολαπλαςιάζυμε

λ. χ. κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις επι το — 1) κε ίςτερα προςθέτυμε τις εκςιςόςις:[1]

$$+\begin{cases} -3x+5y=-8 \\ \ \ 3x+7y=\ \ 32 \end{cases}$$

$$12y=24, \qquad y=2,$$

$$3x+7\cdot 2=32, \qquad 3x=32-14=18, \qquad x=6.$$

Ας πάρυμε τόρα ςίςτιμα, πυ ι ςιντελεςτές-τυ ίνε διάφορι.

$$\begin{cases} 7x+6y=29, \\ -5x+8y=10. \end{cases}$$

Για να λίςυμε το παραπάνο ςίςτιμα, πρέπι να φροντίςυμε να κάνυμε ί ς υ ς τ υ ς ς ι ν τ ε λ ε ς τ ε ς ενος κάπιυ άγνοςτυ λ. χ. τυ x. Για το ςκοπο αφτο βρίςκυμε το ελάχιςτο κινο πολαπλάςιο τον ςιντελεςτον 7 κε 5 (αφτο θάνε 35) κε πολαπλαςιάζυμε κε τα διο μέλι καθεμιας εκςίςοςις επι τυς αντίςτιχυς ςιμπλιροματικυς παράγοντες (όπος ακριβος γίνετε κε ςτιν περίπτοςι, πυ θέλυμε να τρέπςυμε ετερόνιμα κλάςματα ςε ομόνιμα):

$$\begin{cases} 7x+6y=29 \ (\text{επι } 5) \\ -5x+8y=10 \ (\text{επι } 7) \end{cases} \qquad \begin{cases} 35x+30y=145 \\ -35x+56y=70. \end{cases}$$

Ι λίςι-τυ τόρα θα γίνι, όπος κε τον προιγύμενον ςιςτιμάτον.

Κ α ν ό ν α ς. Για να λίςυμε ςίςτιμα εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς, με τι μέθοδο τις αλγεβρικις πρόςθεςις, κάνυμε ίςυς τυς ςιντελεςτες ενος κάπιυ απ' τυς άγνοςτυς κε τον διο εκςιςόςεον κι αλάζυμε τα ςιμία όλον τον όρον τις μιας εκςίςοςις με τα αντίθετά-τυς, ςε περίπτοςι, πυ ι ςιντελεςτες τον αγνόςτον αφτον έχυνε τα ίδια ςιμία. Προςθέτοντας ίςτερα τις εκςιςόςις αφτες βρίςκυμε εκςίςοςι μ' έναν άγνοςτο. Ι τιμι τυ άγνοςτυ αφτυ θα βρεθι, μόλις λίςυμε τιν εκςίςοςι αφτι. Αντικαταςτένοντας ίςτερα ςε μια κάπια απ' τις δομένες εκςιςόςις τον άγνοςτο αφτο με τιν τιμί-τυ, βρίςκυμε κε τον άλο άγνοςτο.

97. Σίςτιμα εκςιςόςεον με ςιντελεςτες με γράματα. Κάποτε παρυςιάζετε ανάνκι να λίςυμε ςίςτιμα εκςιςόςεον, ι ςιντελεςτες τυ οπίυ παραςτένοντε με γράματα. Ας ιποθέςυμε, λ. χ., πος θέλυμε να λίςυμε το ςίςτιμα:

[1] Ι αντικατάςταςι τον ςιμίον όλον τον όρον τις εκςίςοςις με τα αντίθετά-τυς κ'ι πρόςθεςι κατόπιν τις εκςίςοςις αφτις με τιν άλι, ιςοδιναμι με αφέρεςί-τις απ' τιν πρότι εκςίςοςι.

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Το σίςτιμα αφτο μπορι να λιθι με μια οπιαδίποτε απ' τις διο μέθοδες, πυ εφαρμόζυμε, σε περίπτοσι πυ ι σιντελεςτες ίνε αριθμιτιχι. Το παραπάνο παράδιγμα λίνετε εφχολότερα με τι μέθοδο τις αλγεβριχις πρόςθεσις. Αλάζοντας διλ. τα σιμία μιας χάπιας απ' τις παραςτάςις αφτες, χάνυμε ίςτερα ίςυς τυς σιντελεςτες ενος χάπιυ άγνοςτυ τον εχςιςόςεον, λ. χ. τυ y, χε προςθέτυμε τις εχςιςόςις:

$$\begin{array}{rcl|c|} ax + by &=& c & b' \\ -a'x - b'y &=& -c' & b \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ab'x + bb'y &= b'c \\ -a'bx - bb'y &= -c'b \\ \hline (ab' - a'b)x \quad &= b'c - c'b \end{array},$$

χι απ' αφτο βρίςχυμε:

$$x = \frac{b'c - c'b}{ab' - a'b}.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίςχυμε χε τιν τιμι το y:

$$\begin{array}{rcl|c|} ax + by &=& c & a' \\ -a'x - b'y &=& -c' & a \end{array} \qquad \begin{array}{rl} aa'x + a'by &= \quad a'c \\ -aa'x - ab'y &= -ac' \\ \hline (a'b - ab')y &= \quad a'c - ac' \end{array},$$

χι απ' αφτο βρίςχυμε:

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

169. Να λιθόνε με τι μέθοδο τις αντιχατάςτασις τα αχόλυθα ςιςτίματα τον εχςιςόςεον:

$$\begin{cases} y = 2x - 3, \\ 3x + 2y = 8. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y = 3, \\ 3x - 2y = 7. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 5y = 6, \\ x + 4y = -15. \end{cases}$$

170. Να λιθόνε με τι μέθοδο τις αλγεβριχις πρόςθεσις:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ -2x + 5y = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 5y = 20, \\ 2x - 10y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 8y = 19. \\ 2x - 2y = 10. \end{cases}$$

171. Να λιθυν ι παραχάτο εχςιςόςις με μια οπιαδίποτε μέθοδο:

$$\begin{cases} (2x - 1)(y + 2) = (x - 2)(2y + 5), \\ 5x - 2 = 2y + 15. \end{cases}$$

172. $\begin{cases} ax + by = c, \\ y = mx. \end{cases}$ $\begin{cases} x + a = my, \\ y + b = nx. \end{cases}$

173. Να βρεθυν ι τιμες τον γραμάτον a κε b ςτο διόνιμο: $y = ax + b$, αν ίνε: $y = -11$ κε $x = -2$, $y = 1$ κε $x = 2$.

174. Για 8 χγ εμπόρεμα ενος ίδυς κε 19 χγ άλυ ίδυς πλιρόςανε 16 ρὺβλ. κε 40 καπ. Αλι φορα, για 20 χγ εμπόρεμα τυ πρότυ ίδυς κε 16 χγ τυ δέφτερυ ίδυς πλιρόςανε 28 ρύβλ. κε 40 καπ. Να βρεθι, πόςο κοςτίζι το χιλιόγραμο κάθε ίδυς, αν ίνε γνοςτο, πος κε τις διο φορες τα εμπορέβματα αγοραςτίκανε με τιν ίδια τιμι.

175. Ενα τραςτ προμιθέφτικε για πύλιςι το όλο 65 ποδίλατα κε μοτοςικλὲτες. Για κάθε ποδίλατο πλίροςε 100 ρύβλ. κε για κάθε μοτοςικλέτα 400 ρὺβλ. Οταν πύλιςε το εμπόρεβμα αφτο, το τραςτ κέρδιςε 2980 ρύβλια. Στο κάθε ποδίλατο κέρδιςε 10% κε ςτιν κάθε μοτοςικλέτα 25%. Πόςα ìτανε τα ποδὶλατα κε πόςες ι μοτοςικλέτες;

176. Ενας μιχανικος έπρεπε να βάζι τιλεγραφικυς ςτίλυς ανάμεςα ςε διο τόπυς. Αν έβαζε τυς τιλεγραφικυς ςτίλυς ςε απόςταςι 50 μ τον ένα μακρια απ' τον àλο, όπος λογάριαςε ο μιχανικος, δε θα τὄφταναν 21 ςτὶλι, αν όμος τυς έβαζε ςε απόςταςι 55 μέτρον, δε θα τὄφτανε μονὰχα ένα ςτίλος. Πόςι ίτανε ι ςτίλι κε ςε πόςι απόςταςι έπρεπε να βάζι τον ένα μακρια απ' τον άλο;

177. Διο ορθογόνια τρίγονα έχυν ίςι τιν ιποτίνυςα. Στο πρότο τρίγονο ι μια κάθετος ίνε μικρότερι κατα 4 μ κ' ι άλι κατα 8 μ μεγαλίτερι απ' τις αντίςτιχες κάθετες τυ àλυ τρίγονυ. Να βρεθυν ι κàθετες, αν ίνε γνοςτο, πος το εμβαδο τυ πρότυ τριγόνυ ìνε μεγαλίτερο απ' το εμβαδο τυ δέφτερυ κατα 34 τετρ. μ.

Σίςτιμα τριον εκςιςόςεον με τρις άγνοςτυς.

98. Κανονικι μορφι εκςίςοςις πρότυ βαθμυ με τρις άγνοςτυς. Αν ςε εκςιςόςις πρότυ βαθμυ με τρις άγνοςτυς x, y κε z κάνυμε τυς ίδιυς μεταςχιματιζμυς, πυ γενίκανε νορίτερα ςε εκςιςόςις με ένα κε διο άγνοςτυς, τότε ςτο αριςτερο μέλος τον εκςιςόςεον αφτον θα μίνυνε μονάχα τρις όρι: ένας με το x, άλος με το y κε τρίτος με το z κε το δεκςιο, ένας μονάχα όρος (πυ δεν θἄχι άγνοςτυς). Ι μορφι, πυ θἄχι ςτιν περίπτοςι αφτι ι εκςίςοςι, ονομάζετε κανονικι.

Τέτια ίνε λ. χ. ι εκςίςοςι:

$$5x - 3y - 4z = -12.$$

Ι γενικι (κανονικι) μορφι τις εκςίςοςις αφτις ίνε ι ακόλυθι:

$$ax + by + cz = d,$$

όπυ τα a, b, c κε d ίνε ςχετικι αριθμι.

99. Αόριςτες εκςιςόςις με τρις άγνοςτυς. Ας ιπο-

θέςυμε, πος μας δίνετε το παρακάτο ςίςτιμα διο εκςιςόςεον με τρις άγνοςτυς:

$$5x - 3y + z = 2, \qquad 2x + y - z = 6.$$

Δίνυμε ς' έναν απ' τυς άγνοςτυς αφτυς, λ. χ. τον z, μια οπιαδίποτε τιμι, λ. χ. 1 κε βάζυμε ίςτερα ςε κάθε μια απ' τις εκςιςόςις αφτες ςτι θέςι τυ αγνόςτυ z, τιν τιμί-τυ:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 1 = 2 \\ 2x + y - 1 = 6 \end{cases} \text{διλ.} \begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Με τον τρόπο αφτο θάχυμε ςίςτιμα διο εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς. Λίνοντας το ςίςτιμα αφτο με μια οπιαδίποτε μέθοδο, θα βρύμε:

$$x = 2, \quad y = 3.$$

Επομένος, το δομένο ςίςτιμα με τρις άγνοςτυς αλιθέβι ςε περίπτοςι πυ θάνε: $x = 2$, $y = 3$ κε $z = 1$. Ας δόςυμε τόρα ςτον άγνοςτο z μια κάπια άλι τιμι, λ. χ. $z = 0$, κι ας βάλυμε τιν τιμί-τυ αφτι ςτις δομένες εκςιςόςις:

$$5x - 3y = 2, \quad 2x + y = 6.$$

Θάχυμε πάλι ςίςτιμα διο εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς. Λίνοντας κι αφτο με μια κάπια μέθοδο, θα βρύμε:

$$x = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}, \qquad y = 2\frac{4}{11}.$$

Επομένος, το δομένο ςίςτιμα αλιθέβι, αν ίνε: $x = 1\frac{9}{11}$, $y = 2\frac{4}{11}$ κε $z = 0$. Δίνοντας ςτο z κε μια άλι κάπια (τρίτι) τιμι, θάχυμε πάλι ςίςτιμα διο εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς, απ' το οπίο θα βρεθυν ι νέες τιμες τυ x κε τυ y. Επιδι ςτο z μπορύμε να δόςυμε οπιεςδίποτε τιμες θέλυμε, γι' αφτο θα έχυμε κε για το x κε το y όςες θέλυμε τιμες (αντίςτιχες με τις τιμες, πυ δίνυμε ςτο z). Επομένος διο εκςιςόςις με τρις άγνοςτυς, έχυν άπιρο πλίθος λίςεον. Το ςίςτιμα διλ. αφτο ίνε μ' άλα λόγια αόριςτο.

Ι αοριςτία θάνε πιο μεγάλι, αν έχυμε το όλο μια εκςίςοςι με τρις άγνοςτυς. Σε τέτια περίπτοςι ςε διο κάπιυς απ' τυς άγνοςτυς αφτυς μπορύμε να δόςυμε οπιεςδίποτε τιμες θέλυμε. Ο τρίτος άγνοςτος θα βρεθι απ' τι δομένι εκςίςοςι, αν αντικαταςτίςυμε ς' αφτι τυς άγνοςτυς με τις τιμες, πυ τυς δόςαμε.

100. Σίςτιμα τριον εκςιςόςεον με τρις άγνοςτυς.

Για νάνε δινατο να βρεθυν οριζμένες αριθμιτικες τιμες για κάθε έναν απ' τυς τρις αγνόςτυς, x, y κε z, ίνε ανάνκι νάχυμε σίςτιμα τριον εκςιςόςεον. Τέτιο ςίςτιμα μπορι να λιθι με τι μέθοδο τις αντικατάςταςις καθος κε με τι μέθοδο τις αλγεβρικις πρόςθεςις τον εκςιςόςεον. Θα δίκςυμε με το παρακάτο παράδιγμα, πός εφαρμόζοντε ι μέθοδες αφτες (σε καθεμια εκςίςοςι δίνετε νορίτερα κανογικι μορφι):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7, \\ 7x + 4y - 8z = 3, \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

101. Μέθοδος τις αντικατάςταςις.

Από μια οπιαδίποτε εκςίςοςι λογυχάρι, απ' τιν πρότι βρίςκυμε τιν τιμι κάπιυ αγνόςτυ, λογυχάρι τυ x ος προς τυς άλυς αγνόςτυς.

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}.$$

Επιδι ς' όλες τις εχςιςόςις το x παραςτένι τον ίδιο αριθμο, γι' αφτο μπορύμε ςτις άλες εκςιςόςις (δέφτερι κε τρίτι) ν' αντικαταςτίςυμε το x με τιν παράςταςι, πυ βρίκαμε:

$$7 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} + 4y - 8z = 3,$$

$$5 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} - 3y - 4z = -12.$$

Θάχυμε λιπον με τον τρόπο αφτο ςίςτιμα διο εκςιςόςεον με διο άγνοςτυς, το y κε το z. Λίνοντας το ςίςτιμα αφτο με μια κάπια απ' τις μέθοδες, πυ ιποδίκςαμε, θα βρύμε τις αριθμιτικες τιμες τυ y κε τυ z. Στο παράδιγμά-μας, ι τιμές-τυς θάνε: $y = 3$, $z = 2$. Βάζοντας τις τιμες αφτες ςτιν παράςταςι με τιν οπία εκςιςόςαμε το x, βρίςκυμε κε τιν τιμι τυ x.

$$x = \frac{7 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{3} = 1.$$

Επομένος, ι λίςι τυ ςιςτίματος αφτυ ίνε ι ακόλυθι: $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ (για να βεβεοθύμε, κάνυμε δοκιμι).

102. Μέθοδος αλγεβρικις πρόςθεςις.

Πέρνυμε διο κάπιες απ' τις τρις δομένες εκςιςόςις λ.χ. τιν πρότι κε τι δέφτερι, κι αφυ κάνυμε ίςυς τυς ςιντελεςτες ενός κάπιυ άγνοςτύ-τυς, λ. χ.

τυ z, εχςαλίφυμε τον άγνοςτο αφτο απ' τις εχςιςόςις με τι μέθοδο τις αλγεβριχις πρόςθεςις. Θάχυμε έτςι εχςίςοςι με διο άγνοςτυς, το x χε το y. Πέρνυμε ίςτερα διο χάπιες άλες εχςιςόςις απ' τις δομένες, λ.χ. τιν πρότι χε τιν τρίτι (ί τι δέφτερι χε τιν τρίτι) χε με τον ίδιο τρόπο εχςαλίφυμε χι απ' αφτες τον ίδιο πάλι άγνοςτο, διλ το z. Θάχυμε έτςι χε δέφτερι εχςίςοςι με τυς αγνόςτυς x χε y:

$$\begin{array}{rl|l} 1) & 3x - 2y + 5z = 7 \text{ (επι 8)} & 24x - 16y + 40z = 56 \\ 2) & 7x + 4y - 8z = 3 \text{ (επι 5)} & 35x + 20y - 40z = 15 \\ \hline & & 59x + 4y = 71 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl|l} 1) & 3x - 2y + 5z = 7 \text{ (επι 4)} & 12x - 8 + 20z = 28 \\ 2) & 5x - 3y - 4z = -12 \text{ (επι 5)} & 25x - 15y - 20z = -60 \\ \hline & - & 37x - 23y = -32 \end{array}$$

Λίνοντας τις διο εχςιςόςις, πυ βρίχαμε, θάχυμε: $x = 1$, $y = 3$. Βάζοντας τυς αριθμυς αφτυς ςτι θέςι τον αντίςτιχον γραμάτον μιας χάπιας απ' τις εχςιςόςις, πυ ίχαμε, λ.χ. τις πρότις θάχυμε:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5z = 7, \qquad 5z = 7 - 3 + 6 = 10, \qquad z = 2.$$

Σιμίοςι. Με τις ίδιες διο μέθοδες, πυ ιποδίχςαμε, μπορύμε ςίςτιμα τεςάρον εχςιςόςεον με τέςερις άγνοςτυς να το χάνυμε ςίςτιμα τριον εχςιςόςεον με τρις άγνοςτυς (χε το ςίςτιμα αφτο με τι ςιρά-τυ, ςίςτιμα διο εχςιςόςεον με διο άγνοςτυς). Γενιχα, ςίςτιμα m εχςιςόςεον με m άγνοςτυς, μπορύμε να χάνυμε ςίςτιμα $m - 1$ εχςιςόςεον με $m - 1$ άγνοςτυς, χε το νέο αφτο ςίςτιμα, ςε ςίςτιμα $m - 2$ εχςιςόςεον με $m - 2$ αγνόςτυς χ. τ. λ.)

ΑΣΚΙΣΙΣ.

178. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$ **179** $\begin{cases} 2x + 5y - 3z - 6\frac{1}{4} = 0, \\ 5x - 6y + 2z = 12, \\ 5z = 42\frac{1}{4} - 7x + y. \end{cases}$

180. $\begin{cases} 3x - y + z = 17, \\ 5x + 3y - 2z = 10, \\ 7x + 4y - 5z = 3. \end{cases}$

181. $\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{5x + 6z} = \dfrac{7}{9}, \\ \dfrac{3y + 4z}{x + 2y} = \dfrac{8}{7}, \\ x + y + z = 128. \end{cases}$

Ιδιέτερες περιπτόςις ςιςτιμάτον εκςιςόςεον.

103. Περίπτοςι, ςτιν οπία όλι ι άγνοςτι δεν ιπάρχυνε ςε καθεμια απ' τις εκςιςόςιςις. Λ. χ.:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5, \\ 4v - 5x = 6, \\ 2y + 3z = 6, \\ 3y + 2v = 4. \end{cases}$$

Σε τέτια περίπτοςι το ςίςτιμα λίνετε γριγορότερα, παρα με το ςινιθιζμένο τρόπο εκςετίας, πυ μεριχι άγνοςτι δεν ιπάρχυνε ς'όλες τις εκςιςόςις. Πρέπι μονάχα να μπορέςυμε να καταλάβυμε πιύς απ' τυς άγνοςτυς κε απο πιές εκςιςόςις θα εκςαλίπςυμε για νἄνε δινατο γριγορότερα (νἄχυμε εκςίςοςι μ' έναν άγνοςτο. Στο παράδιγμά-μας, εκςαλίφοντας το z απ' τιν πρότι κε τρίτι εκςίςοςι κε το v απ' τι δέφτερι κε τέταρτι, θἄχυμε διο εκςιςόςις με τυς άγνοςτυς x κε y:

$$\begin{array}{rcl} 10x - y + 3z &=& 5 \\ -2y - 3z &=& -6 \\ \hline 10x - 3y &=& -1, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4v - 5x &=& 6 \\ -4v - 6y &=& -8 \\ \hline -5x - 6y &=& -2. \end{array}$$

Λίνοντας τις εκςιςόςις αφτες, βρίςκυμε: $x = 0,\ y = \dfrac{1}{3}$.

Βάζοντας τόρα τις τιμες αφτες ςτι δέφτερι κε τρίτι εκςίςοςι, θἄχυμε:

$$v = \frac{3}{2}, \qquad z = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

104. Περίπτοςι, ςτιν οπία όλι ι άγνοςτι δίνυντε με μορφι κλαζμάτον: $\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y} \cdots$ Ας ιποθέςυμε λ.χ., πος μας δίνετε το ςίςτιμα:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{7}{6}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=-\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Παρόμιο σίστιμα λίνετε εφχολότερα με τιν ισαγογι β ο ι θ ι τ ι κ ο ν ά γ ν ο σ τ ο ν. Ιποθέτοντας λ. χ. πος ίνε το $\frac{1}{x}=x'$, το $\frac{1}{y}=y'$ χε το $\frac{1}{z}=z'$, θάχυμε νέο σίστιμα με τυς άγνοστυς x', y' χε z':

$$\begin{cases} x'+y'-z'=\frac{7}{6}, \\ x'-y'-z'=-\frac{5}{6}, \\ y'-x'-z'=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Λίνοντας το σίστιμα αφτο, βρίσχυμε:

$$x'=\frac{1}{2}, \qquad y'=1, \qquad z'=\frac{1}{3},$$

διλ.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{y}=1, \qquad \frac{1}{z}=\frac{1}{3}.$$

Απ' τις εξισόσις αφτες βρίσχυμε τις τιμες τον άγνοστον:

$$x=2, \qquad y=1 \qquad z=3.$$

Ας πάρυμε χ' ένα άλο παράδιγμα:

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}-\frac{4}{z}=-13, \\ \frac{6}{x}-\frac{3}{y}-\frac{1}{z}=5\frac{1}{2}, \\ -\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{z}=3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Τα χλάζματα αφτα $\frac{3}{x}$ χε $\frac{2}{y}$ μπορύνε να θεοριθυν σα γινόμενα: $3\cdot\frac{1}{x}$, $2\cdot\frac{1}{y}$ χ.τ.λ. Για το λόγο αφτο, αν ιποθέσυμε, πος

ίνε $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$ κε $\frac{1}{z}=z'$, τότε το ςίςτιμα θα παραςτιθι έτςι:

$$3x'+2y'-4z'=-13,$$

$$6x'-3y'-z'=5\frac{1}{2},$$

$$-5x'+7y'+2z'=3\frac{1}{2}.$$

Απ' τις εχςιςόςις αφτες βρίςχυμε:

$$x'=2, \qquad y'=\frac{1}{2}, \qquad z'=5,$$

όςτε:

$$\frac{1}{x}=2, \qquad \frac{1}{y}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{z}=5,$$

επομένος:

$$x=\frac{1}{2} \qquad y=2, \qquad z=\frac{1}{5}.$$

105. Περίπτοςι, ςτιν οπία ίνε καλο να προςτεθυν όλες ι δομένες εκςιςόςις.

Ας ιποθέςυμε λ. χ., πος έχυμε το ςίςτιμα:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ y+z=b, \\ x+z=c. \end{cases}$$

Προςθέτοντας όλες τις τρις εχςιςόςις, βρίςχυμε:

$$2\,(x+y+z)=a+b+c,$$

$$x+y+z=\frac{a+b+c}{2}.$$

Αφερόντας απ' την τελεφτέα εχςίςοςι καθεμια απ' τις δομένες, θάχυμε:

$$z=\frac{a+b+c}{2}-a, \qquad x=\frac{a+b+c}{2}-b,$$

$$y=\frac{a+b-c}{2}-c.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

182. $\begin{cases} 3x + 5y = 74. \\ 7x + 2z = 66, \\ 2y + \ z = 25, \end{cases}$

183. $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 1, \\ \frac{30}{x} + \frac{31}{y} = 6. \end{cases}$

184. $\begin{cases} 4x - 3z + u = 10, \\ 5y + z - 4u = 1, \\ 3y + u = 17, \\ x + 2y + 3u = 25. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12}, \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24}, \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} + \frac{1}{2} = \frac{6}{z}. \end{cases}$

186. Με πιόν απλύςτερο τρόπο λίνετε το ςίςτιμα:

$$\begin{cases} x + y + z = 29\frac{1}{4}, \\ x + y - z = 18\frac{1}{4}, \\ x - y + z = 13\frac{3}{4}; \end{cases}$$

187. Τρις αγοραςτες αγοράςανε καφε, ζάχαρι κε τςάι. Ο πρότος αγοραςτις πλέροςε για 8 χγ καφε, 10 χγ ζάχαρι κε 3 χγ τςάι 35 ρόβλια. Ο δέφτερος αγοραςτις για 4 χγ καφε, 15 χγ ζάχαρι κε 5 χγ τςάι πλέροςε 40 ρόβλια. Ο τρίτος αγοραςτις κςόδεπςε το όλο 82 ρόβλια κε 50 καπ. για ν' αγοράςι 12 χγ καφε, 20 χγ ζάχαρι κε 10 χγ τςάι. Να βρεθι, πόςο κόςτιζε το χιλιόγραμο τυ καφε, τις ζάχαρις κε τυ τςαιυ.

188. Κάπιος έχι τρία κομάτια κράμα απο χριςο, αςίμι κε χαλκο. Τα κομάτια αφτα περιέχυνε:

1) 5 μέρι χριςο, 6 μέρι αςίμι, 8 μέρι χαλκο.
2) 3 „ „ 5 „ „ 7 „ „
3) 7 „ „ 13 „ „ 18 „ „

Πόςα χιλιόγραμα πρέπι να πάρυμε απ' το κάθε κομάτι για να κάνυμε κράμα, πυ να περιέχι 79 χγ. χριςο, 118 χγ αςίμι κε 162 χγ χαλκο;

Ιςτορικες ςιμιόςις.

Τις εκςιςόςις απαντύμε κε ςτα πιο παλια χρόνια, ςτυς εγίπτιυς. Σε πάπιρο γραμένο απ' τον Α χ μ ε ς (2000 χρόνια πριν απ' τι ςιμερινι χρονολογία), απαντιέντε εκςιςόςις πρότυ βαθμυ μ' έναν άγνοςτο. Ο άγνοςτος ίνε εκι ςιμιομένος με τι λέκςι «χάυ» — ςορος.

Στον έλινα μαθιματικο Δ ι ό φ α ν τ ο (ςτον IV εόνα τις χρονολογίας-μας), βρίςκυμε τις πιο πικιλόμορφες εκςιςόςις, ανάμεςα ςτις οπίες τι-

χένυν κ' εκςιςόςις με πολυς άγνοςτυς. Οςτόςο ο Διόφαντος δε μας δίνι γενικι μέθοδο τις λίςις-τυς.

Ο Ν ι ύ τ ο ν μας δίνι πια κάμποςες μέθοδες λίςις ςιςτιμάτον εκςιςόςεον, μια απ' τις οπίες ίνε κ' ι μέθοδος τις αντικατάςταςις.

Με τις εκςιςόςις καταγίνανε πολι ι άραβες επιςτίμονες. Για τι λίςι-τυς χριςιμοπιύςανε τις μέθοδες τις πρόςθεςις κε τις αφέρεςις τυ ίδιυ αριθ-μυ κε ςτα διο μέλι τις εκςίςοςις. Ι πρότι απ' τις πράκςις αφτες ονομα-ζότανε ςτι γλόςα-τυς „*algebre*" κ' ι δέφτερι „*almukabalah*". Απ' τιν πρότι απ' τις παραπάνο λέκςις πίρε τιν ονομαςία-τις ι άλγεβρα.

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΤΟ.

ΕΚΣΑΓΟΓΙ ΤΙΣ ΤΕΤΡΑΓΟΝΙΚΙΣ ΡΙΖΑΣ.

I. Θεμελιόδικες ιδιότιτες τον ριζον.

106. Οριζμος τις ρίζας. Τετραγονικι ρίζα ενος αριθμυ, λ.χ. τυ a, ονομάζυμε κίνον τον αριθμο, πυ ιπςύμενος ςτο τετράγονο δίνι τον a. Ι τετραγονικι ρίζα λ.χ. τυ 49 ίνε το 7, καθος κε το -7 επιδι $7^2 = 49$ κε $(-7)^2 = 49$. Τρίτι ρίζα (ί κιβικι) τυ αριθμύ a, ονομάζυμε κίνον τον αριθμο, πυ ιπςύμενος ςτον κίβο δίνι τον a. Ι κιβικι ρίζα λ. χ. τυ -125 ίνε το -5, επιδι $(-5)^3 = (-5)\,(-5)\,(-5) = -125$.

Γενικα, νιοςτι (n) ρίζα τυ αριθμυ a, ονομάζυμε κίνον τον αριθμο, πυ ιπςύμενος ςτι νιοςτι δίναμι δίνι τον a.

Ο αριθμος n, πυ δίχνι τιν τάκςι τις ρίζας, ονομάζετε δίχτις τις ρίζας.

Το ςιμίο $\sqrt{\ }$ λέγετε ριζικο. Κάτο απ' τιν οριζόντια γραμι τυ ςιμίυ αφτυ γράφυν τον αριθμο, τιν ρίζα τυ οπίυ θέλυνε να μάθυν (ιπόριζο) κε πάνο απ' το άνιγμα τις γονίας, το δίχτι τις ρίζας. Λ.χ:

κιβικι ρίζα τυ 27 . . . . $\sqrt[3]{27}$,

τέταρτι ρίζα τυ 32 . . . . $\sqrt[4]{32}$.

Ι τετραγονικι ρίζα παραςτένετε ςινίθος χορις δίχτι: λ. χ. αντις $\sqrt[2]{16}$, γράφυν $\sqrt{16}$.

Ι πράκςι, με τιν οπία βρίςκυμε τι ρίζα, λέγετε εκςαγογι τις ρίζας. Ι πράκςι αφτι ίνε αντίςτροφι με τιν ίπςοςι ςε δίναμι, γιατι ς' αφτι ζιτύμε κίνο, πυ δίνετε ςε περίπτοςι, ςτιν οπία ιπςόνυμε αριθμυς ςε δίναμι (τι βάςι διλ. τις δίναμις) κε δίνετε εκςάλυ κίνο, πυ ζιτύμε να βρύμε ςε περίπτοςι

πάλι, πυ ιπςόνυμε αριθμυς ςε δίναμι (ι ίδια διλ. δίναμι). **Για το λόγο αφτο, για να μάθυμε αν γένικε ςοςτι ι εκςαγογι τις ρίζας, ιπςόνυμε αφτι ςε δίναμι.** Για να βεβεοθύμε λ. χ. πος ι ιςότιτα $\sqrt[3]{125} = 5$ αλιθέβι, αρκι να ιπςόςυμε το 5 στον κίβο. Αν κάνοντας τιν πράκςι βρίςκυμε το ιπόριζο 125, λέμε πος ι εκςαγογι τις ρίζας γένικε χορις λάθος.

107. Αριθμιτικι ρίζα. Α ρ ι θ μ ι τ ι κ ι ρίζα ονομάζετε κίνι ι ρίζα, πυ εκςάγετε απο θετικο αριθμο κ' ίνε εκςάλυ κ' ι ίδια θετικος αριθμος. Ι αριθμιτικι λ. χ. ρίζα τυ 49 ίνε το 7. Ο αριθμος -7, πΰνε κι αφτος τετραγονικι ρίζα τυ 49, δε μπορι να ονομαςτι αριθμιτικι ρίζα.

Θα αναφέρυμε τις ακόλυθες διο ιδιότιτες τις αριθμιτικις ρίζας.

α) Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να μάθυμε τιν αριθμιτικι $\sqrt{49}$. Τέτια ρίζα ίνε το 7, επιδι $7^2 = 49$. Γενιέτε όμος τόρα το ερότιμα. Δεν ιπάρχι άραγες κανένας άλος θετικος αριθμος x, πυ νἄνε κι αφτος ίςος με $\sqrt{49}$; Ας ιποθέςυμε, πος ένας τέτιος αριθμος ιπάρχι. Τότε αφτος πρέπι νἄνε, ίτε μικρότερος απ' το 7 ίτε μεγαλίτερος απ' το 7. Αν παραδεχτύμε, πος ίνε $x < 7$, τότε θἄνε κε $x^2 < 49$ (μικρένοντας τον πολαπλαςιαςτι κε τον πολαπλαςιαςτέο, γίνετε μικρότερο κε το γινόμενο). Αν, τυναντίο, παραδεχτύμε, πος ίνε $x > 7$, τότε θἄνε κε $x^2 > 49$. Επομένος, κανένας θετικος αριθμος, μικρότερος ίτε μεγαλίτερος απ' το 7, δε μπορι νἄνε ίςος με τιν $\sqrt{49}$. Κ' έτςι, **ι αριθμιτικι ρίζα τις τάκςις αφτις ίνε μια κε μόνι.**

Σε διάφορο ςιμπέραζμα θα φτάναμε, αν μιλύςαμε για μια κάπια τιμι τις ρίζας κι όχι μόνο τι θετικι. Λ.χ. ι $\sqrt{49}$ ίνε ίςι με τον αριθμο 7 κε τον αριθμο -7 [επιδι $7^2 = 49$ καθος κε $(-7)^2 = 49$].

β) Ας πάρυμε διο κάπιυς άνιςυς θετικυς αριθμυς, λ.χ. τον 49 κε τον 64. Μια κ' ίνε $49 < 64$, ςιμπερένυμε πος θἄνε κε $\sqrt{49} < \sqrt{64}$ (ςε περίπτοςι μονάχα πυ το ςιμίο $\sqrt{\ }$ θα παραςτένι αριθμιτικι τετραγονικι ρίζα). Κε πραγματικα: $7 < 8$. Για τον ίδιο ακριβος λόγο κε $\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{125}$, επιδι ίνε $64 < 125$. Κε πραγματικα: $\sqrt[3]{64} = 4$ κε $\sqrt[3]{125} = 5$ κε $4 < 5$. Γενικα:

ςτο μικρότερο θετικο αριθμο αντιςτιχι κ' ι μικρότερι αριθμιτικι ρίζα (τις ίδιας τάκςις).

108. Αλγεβρικι ρίζα. Αλγεβρικι ονομάζετε ι ρίζα ςε

περίπτοςι, που δε ζιτύμε να εκςαχτι αφτι απο ένα θετικο αριθμο χε νάνε χ' ι ίδια θετικος αριθμος. Αν λ.χ. ι παράςταςι $\sqrt[n]{a}$ φανερόνι αλγεβριχι ρίζα νιοςτις τάκςις, τότε ο αριθμος a μπορι νάνε θετικος ος κι αρνιτικος, χ' ι ίδια πάλι ρίζα μπορι κι αφτι νάνε θετικι καθος κι αρνιτικι.

Θα αναφέρυμε τις ακόλυθες τέςερις ιδιότιτες τις αλγεβρικις ρίζας.

α) **Κάθε θετικος αριθμος έχι μια ρίζα περιτις τάκςις (θετικι).**

Ι $\sqrt[3]{8}$ λ.χ., πρέπι νάνε θετικος αριθμος (ίνε ίςι με 2), επιδι κάθε αρνιτικος αριθμος ιπςύμενος ςε περιτι δίναμι, δίνι εκςαγόμενο αρνιτικο αριθμο.

β) **Κάθε αρνιτικος αριθμος έχι μια ρίζα περιτις τάκςις (αρνιτικι).**

Ι $\sqrt[3]{-8}$ λ.χ. πρέπι νάνε αρνιτικος αριθμος (ίνε ίςι με -2), επιδι κάθε θετικος αριθμος ιπςύμενος ςε μια κάπια δίναμι, δίνι εκςαγόμενο θετικο κι όχι αρνιτικο αριθμο.

γ) **Κάθε θετικος αριθμος έχι διο ρίζες αρτίας τάκςις (μια θετικι κε μια αρνιτικι).**

Ι $\sqrt{+4}=+2$, κε $\sqrt{+4}=-2$, γιατι ίνε $(+2)^2=+4$, κε $(-2)^2=+4$. Για τον ίδιο πάλι λόγο θάνε: $\sqrt[4]{+81}=+$ $+3$ κε $\sqrt[4]{+81}=-3$ επιδι ι δινάμις $(+3)^4$ κε $(-3)^4$ ίνε ίςες μ' ένα κε τον ίδιο αριθμο $+81$.

Τι διπλι τιμι τις ρίζας παραςτένυμε ςινίθος με διο ςιμία, πυ βάζυμε μπροστα απ' τιν απόλιτί-τις τιμι. Γράφυμε λ.χ.:

$$\sqrt{4}=\pm 2, \quad \sqrt{a^2}=\pm a, \sqrt{9x^4}=\pm 3\,x^2.$$

δ) **Κάθε αρνιτικος αριθμος δεν έχι ρίζα αρτίας τάκςις (ύτε θετικι, ύτε αρνιτι),** επιδι κ' ι μια χ' ι άλι ιπςύμενι ςε δίναμι με άρτιο εκθέτι θα δόςι εκςαγόμενο θετικο κι όχι αρνιτικο αριθμο. Λ.χ. Ι $\sqrt{-9}$ δεν ίνε ίςι μίτε με το $+3$, μίτε με το -3, μίτε με χανέναν άλο αριθμο.

Ι ρίζες τον άρτιον τάκςεον τον αρνιτικον αριθμον, ονομάζοντε φανταςτικι αριθμι. Ι ςχετικι αριθμι, για να διαχριθυν απ' αφτυς ονομάζοντε πραγματικι αριθμι.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Με τί ίνε ίςες ι ακόλυθες παραςτάςις;

189. $\sqrt{100}$, $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{9}{16}}$, $\sqrt{a^2}$, $\sqrt{x^2}$.

190. $(\sqrt{5})^2$, $(\sqrt[3]{27})^3$, $(\sqrt[5]{a})^5$, $(\sqrt{1+x})^2$.

191. $\sqrt[3]{+27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$, $\sqrt{-0{,}001}$

192. $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-16}$.

109. Εκςαγογι τις ρίζας τυ γινομένυ, τις δίναμις κε τυ κλάζματος. α) Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να εκςαχτι ι τετραγονικι ρίζα τυ γινομένυ abc. Το τετράγονο κάθε μονονίμυ βρίςκετε, όπος ίδαμε (§ 46), αν διπλαςιαςτυν ι εκθέτες τον παραγόντον-τυ. Επιδι ι εκςαγογι τις ρίζας ίνε πράκςι αντίςτροφι με τιν ίπςοςι ςε δίναμι, ςιμπερένυμε, πος για να εκςαχτι ι ρίζα τυ γινομένυ αφτυ, πρέπι να εκςαχτι ι ρίζα κάθε παράγοντά-τυ. Θάχυμε διλ.:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Για να βεβεοθύμε τόρα, πος ι ιςότιτα αφτι αλιθέβι, ιπςόνυμε ςτο τετράγονο το δεκςιό-τις μέλος (ςίμφονα με το θεόριμα: για να ιπςοθι γινόμενο ςε δίναμι...):

$$(\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2\ (\sqrt{b})^2\ (\sqrt{c})^2.$$

Σίμφονα όμος με τον οριζμο τις ρίζας θάνε:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt{b})^2 = b, \quad (\sqrt{c})^2 = c.$$

Επομένος:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2 = abc.$$

Μια όμος πυ το τετράγονο τυ γινομένυ $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}$ ίνε ίςο με το abc, ςιμπερένυμε, πος το γινόμενο αφτο θάνε ίςο με τιν τετραγονικι ρίζα τυ abc. Για τον ίδιο πάλι λόγο, θάχυμε:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c},$$

επιδι, $\left(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3\left(\sqrt[3]{c}\right)^3=abc.$

Επομένος, **για να εκςαχτι ι ρίζα ενος γινομένυ, αρκι να εκςαχτι ι ρίζα κάθε παράγοντά-τυ.**

β) Εφχολα μπορύμε να βεβεοθύμε με δοκιμι, πος αλιθέβυν ι ακόλυθες ισότιτες:

$$\sqrt{a^4}=a^2,\ \text{επιδι}\ (a^2)^2=a^4,$$

$$\sqrt[3]{x^{12}}=x^4,\ \ \text{»}\ \ (x^4)^3=x^{12}\ \text{κ.τ.λ.}$$

Επομένος, **για να εκςαχτι ι ρίζα μιας δίναμις, ο εκθέτις τις οπίας διερίτε με το δίχτι τις ρίζας, αρκι να διερεθι ο εκθέτις τις δίναμις με το δίχτι τις ρίζας.**

γ) Θάνε ακόμα ςοςτες κ' ι ακόλυθες ισότιτες:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4},\ \text{επιδι}\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3},\ \text{επιδι}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Γενικα:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Επομένος, **για να εκςαχτι ι ρίζα κλάζματος, αρκι να εκςαχτι χοριςτα ι ρίζα τυ αριθμιτι κε χοριςτα τυ παρονομαςτι.**

Πρέπι να ςιμιοθι, πος ς' όλες τις περιπτόςις αφτες έχυμε ιπόψι μονάχα τις αριθμιτικις ρίζες.

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α.

1. $\sqrt{9a^4b^6}=\sqrt{9}\ \sqrt{a^4}\ \sqrt{b^6}=3a^2b^3.$

2. $\sqrt[3]{125a^6x^9}=\sqrt[3]{125}\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{x^9}=5a^2,x^3.$

Σ ι μ ί ο ς ι. Εαν ι ζιτύμενι ρίζα ίνε *ά ρ τ ι α ς* τάκςις κε ταφτόχρονα αλγεβρικι, τότε μπροςτα απ' το εκςαγόμενο, πυ θα βρύμε, πρέπι να βάζυμε το διπλο ςιμίο $\pm$ Λ.χ:

$$\sqrt{9x^4} = \pm 3x^2.$$

ΑΣΚΙΣΙΣ.

193. $\sqrt{4 \cdot 9}$, $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0{,}01 \cdot 25}$, $\sqrt{4a^2b^2}$, $\sqrt{9a^2x^2y^4}$.

194. $\sqrt[3]{-27ab^3}$, $\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}$, $\sqrt[5]{abc}$.

195. $\sqrt{a^4}$, $\sqrt{2^4}$, $\sqrt{a^6}$, $\sqrt{(a+b)^4}$.

196. $\sqrt[3]{2^6}$, $\sqrt[3]{-a^6}$, $\sqrt[3]{x^9}$, $\sqrt[3]{(m+n)^6}$.

197. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$, $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$, $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{y^3}}$, $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

198. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$, $\sqrt{0{,}36x^4y^2}$, $\sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}$.

II. Εκςαγογι τις τετραγονικις ρίζας τον αριθμον.

110. Προκαταρχτικες παρατιρίςις. α) Για ςιντομία ςτο κεφάλεο αφτο αντις «τετραγονικι ρίζα» θα λέμε μονάχα «ρίζα».

β) Αν ιπςόςυμε ςτο τετράγονο τυς ακέρευς διαδοχικυς αριθμυς, 1, 2, 3, 4, 5..., θάχυμε τον παρακάτο πίνακα τον τετραγόνον:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144...

Ινε φανερο, πος ιπάρχυν πολι αριθμι το τετράγονο τον οπίον δε βρίςκετε ςτον πίνακα αφτο. Τιν ακέρεα τετραγονικι ρίζα τέτιον αριθμον, δε μπορύμε, βέβεα, να τίνε βρύμε. Για το λόγο αφτο, ςε περίπτοςι πυ θέλυμε να βρύμε τι ρίζα ενος κάπιυ ακέρευ αριθμυ, λ. χ. τι $\sqrt{4082}$, δοκιμάζυμε να εκςάγυμε τιν ακέρεα ρίζα τυ 4082, αν αφτο ίνε δινατο, κι αν όχι, τότε βρίςκυμε το μεγαλίτερο ακέρεο αριθμο, το τετράγονο τυ οπίυ περιέχετε ςτο 4082 (τέτιος ίνε ο αριθμος 63, επιδι $63^2 = 3969$, ένο $64^2 = 4096$).

γ) Αν ο δομένος αριθμος ίνε μικρότερος απ' το 100, τότε ι ρίζα-τυ βρίςκετε ςτον πιθαγόριο πίνακα (πίνακα τυ πολαπλαςιαςμυ).

111. Εκςαγογι τις ρίζας ακέρευ αριθμυ, μικρό-

τερυ απ' το 10 000, μα μεγαλίτερυ απ' το 100. Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να βρεθι ι $\sqrt{4082}$. Επιδι ο αριθμος αφτος ίνε μικρότερος τυ 10 000, γι' αφτο ι ρίζα-τυ θἄνε μικρότερι τυ 100. Εκςάλυ, μια κι ο αριθμος αφτος ίνε μεγαλίτερος τυ 100, ι ρίζα-τυ πρέπι νἄνε μεγαλίτερι τυ 10 (ί κ' ίςι με το 10). Κάθε όμος αριθμος, μεγαλίτερος τυ 10 (ί κ' ίςος με το 10) κε μικρότερος τυ 100, έχι διο πςιφία. Επομένος, ι ζιτύμενι ρίζα ίνε άθριζμα:

$$\text{δεκάδον} + \text{μονάδον},$$

κε γι' αφτο το τετράγονο πρέπι νἄνε ίςο με το άθριζμα:

$$(\text{δεκάδες})^2 + 2 \cdot (\text{δεκ.}) \cdot (\text{μον.}) + (\text{μονάδες})^2.$$

Το άθριζμα αφτο πρέπι νἄνε το μεγαλίτερο τετράγονο, πυ περιέχετε στο 4082. Επιδι (ι δεκάδες)^2 αποτελυν εκατοντάδες, γι' αφτο το τετράγονο τον δεκάδον πρέπι να το ζιτίςυμε ςτις εκατοντάδες τυ δομένυ αριθμυ. Ο δομένος αριθμος έχι 40 εκατοντάδες (τον αριθμο αφτον βρίςκυμε, χορίζοντας απ' τα δεκςια με τιν ιποδιαςτολι διο πςιφία). Στο 40 όμος περιέχυντε τα τετράγονα τον αριθμον: 36, 25, 16... κι άλον. Πέρνυμε απ' αφτα το μεγαλίτερο, το 36, κε λέμε, πος το τετράγονο τον δεκάδον τις ρίζας θἄνε ίςο μ' αφτο. Σε τέτια περίπτοςι ο αριθμος τον δεκάδον τις ρίζας πρέπι νἄνε 6. Ας δοκιμάςυμε τόρα, αν ένα τέτιο ςιμβένι πάντα, αν διλ. πάντοτε **ο αριθμος τον δεκάδον τις ρίζας ίνε ίςος με τι μεγαλίτερι ακέρεα ρίζα τυ αριθμυ τον εκατοντάδον τυ ιπόριζυ.** Κε πραγματικα στο παράδιγμά-μας ο αριθμος τον δεκάδον τις ρίζας δε μπορι νἄνε μεγαλίτερος τυ 6, επιδι (7 δεκ.)$^2 = 49$ εκατ. αποτελυν αριθμο, πυ ιπερβένι το 4082. Δε μπορι όμος νἄνε κε μικρότερος τυ 6, επιδι απ' τι μια μερια 5 δεκ. (μαζι με τις μονάδες) ίνε αριθμος μικρότερος απ' τις 6 δεκ. κ' εκςάλυ (6 δεκ.)$^2 = 36$ εκατοντάδες, αποτελυν αριθμο μικρότερο τυ 4082. Επιδι όμος ζιτύμε τι μεγαλίτερι ακέρεα ρίζα, δεν πρέπι γι' αφτο να πάρυμε για ρίζα τις 5 δεκάδες τι στιγμι πυ κ' ι έκςι δεκάδες δεν ίνε πολες. Ετςι λιπον βρίκαμε τον αριθμο τον δεκάδον τις ρίζας, διλ. το 6. Γράφυμε το πςιφίο αφτο δεκςια απ' το ςιμίο =, έχοντας ιπόψι, πος αφτο φανερόνι τις δεκάδες τις ρίζας. Ιψόνοντάς-το στο τετράγονο, θἄχυμε 36 εκατοντάδες. Αφερύμε ίςτερα τις 36 εκατοντάδες απ' τις 40 εκατοντάδες το ιπόριζυ κε κατεβάζυμε στο κατάλιπο τον αριθμο 82:

$$\sqrt{40'82} = 6$$
$$\begin{array}{l} 36 \\ \hline 48'2 \end{array}$$

Στον αριθμο 482 πρέπι να περιέχετε το άθριζμα:

$$2 \cdot (6 \text{ δεχ.}) \cdot (\text{μον.}) + (\text{μον.})^2.$$

Το γινόμενο (6 δεχ.) · (μον) πρέπι νἄνε δεχάδες. Για το λόγο αφτο το διπλάσιο γινόμενο τον δεχάδον επι τις μονάδες, πρέπι να ζιτιθι στις δεχάδες τυ κατάλιπυ, διλ. στο 48 (τον αριθμό-τυς βρίσχυμε, χορίζοντας απ' τα δεξια τυ κατάλιπυ 48'2 ένα πσιφίο). Το διπλάσιο γινόμενο τον δεχάδον τις ρίζας ίνε 12. Επομένος αν το 12 πολαπλασιάσυμε επι τις μονάδες τις ρίζας (πυ ίνε αχόμα άγνοστες), πρέπι να βρύμε αριθμο, πυ περιέχετε στο 48. Για το λόγο αφτο, διερύμε το 48 με το 12. Ι εργασία αφτι γίνετε έτσι: φέρνυμε αριστερα απ' το κατάλιπο μια καταχόριφι γραμι, κε πίσο απ' αφτι (αφίνοντας μια θέσι άδια για σκοπο, πυ γρίγορα θα φανι) γράφυμε το διπλάσιο γινόμενο τυ πρότυ πσιφίυ τις ρίζας, διλ. το 12, με το οπίο κε διερύμε το 48.

Το πιλίκο θἄνε 4. Οστόσο δε μπορύμε να πύμε απο πριν, πος το πσιφίο αφτο (4) θἄνε ι μονάδες τις ρίζας, επιδι διερέσαμε με το 12 όλο τον αριθμο τον δεχάδον τυ καταλίπυ, μ' όλο πυ ένα μέρος-τυς μπορύσε να μιν ανίχι στο διπλάσιο γινόμενο τον δεχάδον επι τις μονάδες, επιδι περιεχότανε στο τετράγονο τον μονάδον. Για το λόγο αφτο το πσιφίο 4 μπορι νἄνε μεγαλίτερο απο κίνο, πυ ζιτύμε. Πρέπι λιπον να γίνι δ ο κ ι μ ι. Το πσιφίο αφτο θἄνε, όπος ίνε φανερο, κίνο, πυ ζιτύμε σε περίπτοσι, πυ το άθριζμα $2 \cdot (6 \text{ δεχ.}) \cdot 4 + 4^2$ δε θἄνε μεγαλίτερο απ' το κατάλιπο 482. Το άθριζμα αφτο μπορι να βρεθι μονομιας με τον ακόλυθο απλο τρόπο: γράφυμε κοντα στο διπλάσιο γινόμενο τυ πσιφίυ τις ρίζας (το 12) προς τα δεξια το πσιφίο 4 (για το λόγο αχριβος αφτο αφίκαμε μια θέσι άδια) κε πολαπασιάζυμε επι το πσιφίο αφτο τον αριθμο, πυ θα προκίπσι (το 124 επι το 4):

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{40'82} = 6 \\ & 36 \\ 124 & 48'2 \\ 4 & 49\,6 \end{array}$$

Κε πραγματικα, κάνοντας τον πολαπλασιαζμο αφτο, πολαπλασιάζυμε το 4 επι το 4, βρίσχυμε διλ. το τετράγονο τον μονάδον τις

ρίζας. Πολαπλαςιάζοντας ίςτερα τις 12 δεκάδες επι το 4, βρίςκυμε το διπλάςιο γινόμενο τον δεκάδον τις ρίζας επι τις μονάδες. Το εκςαγόμενο θάνε το άθριζμα κε τον διο. Επιδι το γινόμενο 496, πυ βρίκαμε, ίνε μεγαλίτερο απ' το κατάλιπο 482, ςιμπερένυμε, πος το πςιφίο 4 ίνε μεγάλο. Σε τέτια περίπτοςι δοκιμάζυμε το ακόλυθο μικρότερο πςιφίο, το 3, με τρόπο όμιο με τον παραπάνο. Για το ςκοπο αφτο ζβίνυμε το πςιφίο 4 κε το γινόμενο 496 κε βάζοντας ςτι θέςι τυ 4 το πςιφίο 3, πολαπλαςιάζυμε το 123 επι το 3:

$\sqrt{40'82} = 63$

```
      36
 123 |48'2
   3 |36 9
     -----
      113
```

Επιδι το γινόμενο 369 ίνε μικρότερο απ' το κατάλιπο 482, ςιμπερένυμε, πος το πςιφίο 3 ίνε κίνο, πυ ζιτύμε (αν πάλι κε το πςιφίο αφτο θάτανε μεγάλο, θάπρεπε να δοκιμάςυμε το ακόλυθο μικρότερο πςιφίο, διλ. το 2). Γράφυμε τόρα το πςιφίο 3 ςτι ρίζα δεκςια απ' το πςιφίο τον δεκάδον. Το τελεφτέο κατάλιπο (113) δίχνι κατα πόςο ίνε μεγαλίτερος ο δομένος αριθμος απ' το μεγαλίτερο ακέρεο τετράγονο, πυ περιέχετε ς' αφτον. Για να βεβεοθύμε, πος ίνε έτςι, ιπςόνυμε ςτο τετράγονο το 63 κε προςθέτυμε ίςτερα με το εκςαγόμενο, πυ θα προκίπςι 113:

$$
\begin{array}{r}
63^2 = 3969 \\
+\ 113 \\
\hline
4082
\end{array}
$$

Επιδι το άθριζμα, πυ βρέθικε με τον τρόπο αφτο, ίνε ίςο με το δομένο αριθμο 4082, ςιμπερένυμε, πος ι πράκςι ίνε ςοςτι.

Παραδίγματα.

1. $\sqrt{12'25} = 35$

```
      9
 65 |32'5
  5 |32 5
    -----
      0
```

2. $\sqrt{86'55} = 93$

```
      81
 183 |55'5
   3 |54 9
     -----
        6
```

3. $\sqrt{16'05} = 40$

```
     16
  8 | 0'5
```

4. $\sqrt{8'72} = 29$
4
49 | 47'2
9 | 441
31

5. $\sqrt{64'00} = 80$
64
00

Στο τέταρτο παράδιγμα, αν διερέσυμε τις 47 δεκάδες τυ καταλίπυ με το 4, θα βρύμε πιλίκο 11. Επιδι όμος το πςιφίο τον μονάδον τις ρίζας δε μπορι νάνε διπςίφιος αριθμος 11 ί 10, γι' αφτο δοκιμάζυμε το πςιφίο 9.

Στο πέμτο παράδιγμα, αφερόντας το τετράγονο τον δεκάδον τις ρίζας απ' το πρότο-τις τμίμα, βρίςκυμε 0. Επιδι όμος στιν περίπτοςι αφτι κε το δέφτερο τμίμα τις ρίζας αποτελίτε απο μιδενικα, ςιμπερένυμε πος ι ζιτύμενι ρίζα έχι μονάχα 8 δεκάδες. Για το λόγο αφτο ςτι θέςι τον μονάδον πρέπι να βάλυμε μιδενικο.

112. Εκςαγογι τις ρίζας ακέρευ αριθμυ, μεγαλίτερυ τυ 10 000. Ας ιποθέςυμε πος θέλυμε να βρεθι ι $\sqrt{35\,782}$. Επιδι το ιπόριζο κςεπερνάι το 10 000, γι' αφτο ι ρίζα-τυ θάνε μεγαλίτερι απ' τι $\sqrt{10\,000} = 100$ κε θ' αποτελίτε, επομένος, απο 3 πςιφία ί κε περιςότερα. Απ' όςα όμος πςιφία κι αν αποτελίτε, μπορύμε πάντοτε να τι θεορίςυμε ςαν άθριζμα μονάχα δεκάδον κε μονάδον. Αν λ. χ. ι ρίζα ίνε 482, τότε θα μπορέςυμε να τι θεορίςυμε ςαν άθριζμα 48 δεκάδον + 2 μονάδον. Σε τέτια περίπτοςι το τετράγονο τις ρίζας θ' αποτελίτε απο τρις προςθετέυς.

$$(\text{δεκάδες})^2 + 2 \cdot (\text{δεκ.}) \cdot (\text{μον.}) + (\text{μον.})^2.$$

Τόρα μπορύμε να εργαςτύμε με τον ίδιο απαράλαχτα τρόπο, όπος κε στιν περίπτοςι, πυ θέλαμε να βρύμε τι $\sqrt{4082}$ (στιν προιγύμενι παράγραφο), με μόνι τι διαφορα, πυ τότε για να βρύμε τις δεκάδες τις ρίζας τυ 4082, έπρεπε να εκςάγυμε τι ρίζα τυ 40, πράμα πυ ίταν δινατο να κάνυμε με τι βοίθια τυ πίνακα τυ πολαπλαςιαζμυ, ενο τόρα ίνε ανάνκι, για να βρύμε τις δεκάδες τις $\sqrt{357'82}$ να εκςάγυμε τι ρίζα τυ 357, πράμα πυ με τι βοίθια τυ πίνακα τυ πολαπλαςιαζμυ ίνε αδίνατο να γίνι. Τι ρίζα όμος τυ 357 μπορύμε να βρύμε με τιν ίδια μέθοδο, πυ περιγράπςαμε στον προιγύμενο παράγραφο, επιδι ο αριθμος $357 < 10\,000$.

```
√ 3'57'82 = 189
  1
28 | 25'7
 8 | 22 4
369| 33 8'2
  9| 33 2 1
       6 1
```

Ι μεγαλίτερι ακέρεα ρίζα τυ 357 θἄνε 18. Επομένος, ι $\sqrt{3'57'82}$ πρέπι νἄχι 18 δεκάδες.

Για να βρεθυν ι μονάδες, πρέπι ν' αφερεθι το τετράγονο τον 18 δεκάδον απ' το 3'57'82. Για το ςκοπο αφτο, αρχι ν' αφερέςυμε το τετράγονο τυ 18 ἀπ' τις 357 εκατοντάδες κε να κατεβάςυμε ςτο κατάλιπο τα διο τελεφτέα πςιφία τυ ιπόριζυ. Το κατάλιπο, πυ θα βρεθι ίςτερα απ' τιν αφέρεςι τυ τετραγόνυ τυ 18 απ' το 357, τὄχυμε πια: ίνε το 33. Επομένος, για τιν έβρεςι τυ καταλίπυ, πυ θα προκίπςι ςε περίπτοςι πυ θ' αφερεθι το τετράγονο τον 18 δεκ. απ' το 3'57'82, αρχι να γράπςυμε δίπλα ςτο 33, απ' τα δεκςια, τα πςιφία 82. Τόρα εργαζόμαςτε με τον ίδιο τρόπο, όπος κε πριν, όταν θέλαμε να βρύμε τι $\sqrt{4082}$: Αριςτερα διλ. απ' το κατάλιπο 3382 φέρνυμε μια κατακόριφι γραμι κε πίςο απ' αφτι γράφυμε (αφίνοντας μια θέςι) το διπλάςιο γινόμενο τον δεκάδον τις ρίζας, διλ. το 36 (διο φορες 18). Χορίζυμε ίςτερα ένα πςιφίο απ' τα δεκςια τυ καταλίπυ κε διερύμε τον αριθμο τον δεκάδον τυ καταλίπυ, διλ. το 338 με το 36. Το πιλίκο θἄνε 9. Για να το δοκιμάςυμε, το γράφυμε δεκςια απ' τα 36 κε πολαπλαςιάζυμε τον αριθμο, πυ θα προκίπςι, επι το πςιφίο αφτο. Επιδι το γινόμενο 3321, πυ θα βρεθι, ίνε μικρότερο απ' το κατάλιπο, ςιμπερένυμε, πος το 9 ίνε το πςιφίο πυ μας χριάζετε κε γι' αφτο το γράφυμε ςτι ρίζα.

Γενικα, **για να εκςαχτι ι τετραγονικι ρίζα ενος κάπιυ ακέρευ αριθμυ, πρέπι ςτιν αρχι να εκςαχτι ι ρίζα τον εκατοντάδον τυ αριθμυ αφτυ. Αν ο αριθμος τον εκατοντάδον ίνε μεγαλίτερος τυ 100, τότε παρυςιάζετε ανάνκι να βρύμε τι ρίζα τον εκατοντάδον αφτον, τον εκατοντάδον, διλ. τον δεκάδον τον χιλιάδον τυ δομένυ αριθμυ. Αν κι ο αριθμος αφτος θἄνε πάλι μεγαλίτερος τυ 100, τότε θα χριαςτι να εκςαχτι ι ρίζα τον εκατοντάδον τον δεκάδον τον χιλιάδον, διλ. τον εκατομιρίον τυ δομένυ αριθμυ κ. τ. λ.**

Παραδίγματα.

1. $\sqrt{8'72'00'00} = 2952$

```
        4
  49 | 47'2
   9 | 44'1
 585 | 310'0
   5 | 292 5
5902 | 1750'0
   2 | 1180 4
         5696
```

2. $\sqrt{3'50'32'60'89} = 18717$

```
         1
   28 |  2 5'0
    8 |  2 2 4
  367 |  2 6 3'2
    7 |  2 5 6 9
 3741 |    636'0
    1 |    374 1
37427 | 2 6 1 9 8'9
    7 | 2 6 1 9 8 9
              0
```

3. $\sqrt{9'51'10'56} = 3084$

```
      9
608 | 51 1'0
  8 | 48 6 4
164 | 24 65'6
  4 | 24 65 6
          0
```

Στο τελεφτέο παράδιγμα, βρίςκοντας το πρότο πςιφίο κε αφερόντας το τετράγονό-τυ, θάχυμε κατάλιπο 0. Κατεβάζυμε ίςτερα τ' ακόλυθα 2 πςιφία 51. Χορίζοντας τις δεκάδες, θάχυμε 5 δεκάδες, τι ςτιγμι που το διπλάσιο γινόμενο τυ πςιφίυ τις ρίζας ίνε 6. Επομένος, διερόντας το 5 με το 6, θάχυμε 0. Βάζυμε ςτι δέφτερι θέςι τις ρίζας 0 κε κατεβάζυμε ςτο κατάλιπο τ' ακόλυθα 2 πςιφία. Θάχυμε 5110. Ιςτερα ςινεχίζυμε με το ςινιθιςμένο τρόπο.

4. $\sqrt{81'00'00} = 900$

```
81
--
 0
```

Στο παράδιγμα αφτο, επιδι ι ζιτύμενι ρίζα αποτελιέτε μονάχα απο 9 εκατοντάδες, γι' αφτο ςτι θέςι τον δεκάδον καθος κε ςτι θέςι τον μονάδον πρέπι να βάζυμε μιδενικα.

Κανόνας. Για να βρύμε τιν τετραγονικι ρίζα ενος ακέρευ αριθμυ, χορίζυμε αφτον ςε διπςίφια τμίματα απ' τα δεξςια προς τ' αριςτερα (το

πρότο τμίμα προς τ' αριςτερα μπορι νάνε κε μονοπςίφιο).

Για να βρύμε το πρότο πςιφίο τις ρίζας, εκςάγυμε τιν τετραγονικι ρίζα τυ πρότυ τμίματος.

Για να βρύμε το δέφτερο πςιφίο τις ρίζας αφερύμε το τετράγονο τυ πρότυ πςιφίυ τις ρίζας απ' το πρότο τμίμα κε κατεβάζυμε ςτο κατάλιπο το επόμενο τμίμα. Αφυ χορίςυμε ίςτερα τις μονάδες τυ αριθμυ, πυ θα ςχιματιςτι με τον τρόπο αφτο, διερύμε τον αριθμο, πυ μένι, με το διπλάςιο πςιφίο τις ρίζας. Κάνομε δοκιμι τυ πρότυ αριθμυ, πυ βρίκαμε.

Ι δοκιμι γίνετε έτςι: Πίςο απ' τιν κατακόριφι γραμι (αριςτερα απ' το κατάλιπο) γράφυμε το διπλάςιο γινόμενο τις ρίζας κε δίπλα-τυ απ' τα δεκςια το πςιφίο, πυ δοκιμάζυμε. Τον αριθμο, πυ θα ςχιματιςτι με τον τρόπο αφτο, πολαπλαςιάζυμε με το πςιφίο, πυ δοκιμάζυμε. Αν ίςτερα απ' τον πολαπλαςιαζμο προκίπςι αριθμος μεγαλίτερος απ' το κατάλιπο, τότε το δοκιμαζόμενο πςιφίο δεν κάνι κε πρέπι να δοκιμάςυμε το ακόλυθο μικρότερο πςιφίο.

Τα άλα πςιφία τις ρίζας βρίςκυντε με τον ίδιο τρόπο.

Αν ο αριθμος τον δεκάδον τυ αριθμυ, πυ ςχιματίςτικε, μόλις κατεβάςυμε ένα κάπιο τμίμα, ίνε μικρότερος απ' το διερέτι, δίλ. μικρότερος απ'το διπλάςιο γινόμενο τις ρίζας, τότε βάζυμε 0 ςτι ρίζα, κατεβάζυμε το επόμενο τμίμα κ' εκςακολυθύμε τιν πράκςι με τον ίδιο τρόπο.

113. Αριθμος τον πςιφίον τις ρίζας. Απ' τα παραδίγματα, πυ εκςετάςαμε παραπάνο, ςιμπερένυμε, πος ι **ρίζα θάχι τόςα πςιφία, όςα ίνε τα διπςίφια τμίματα τυ ιπόριζυ** (το πρότο τμίμα προς τ' αριςτερα μπορι νάνε κε μονοπςίφιο). Αφτο μπορύμε να το πύμε κε μ' άλα λόγια: **Αν ο αριθμος τον πςιφίον τυ ιπόριζυ ίνε άρτιος, τότε ι ρίζα θάχι διο φορες λιγότερα πςιφία απ' τον αριθμο αφτο, αν όμος ίνε περιτος, τότε ι ρίζα θάχι διο φορες λιγότερα πςιφία απ' τον περιτο αφτο αριθμο αφκςιμένο κατα μια μονάδα.**

ΑΣΚΙΣΙΣ.

Να εκςαχτι ι τετραγονικι ρίζα τον ακόλυθον αριθμον:

199. $\sqrt{289}$, $\sqrt{4225}$, $\sqrt{61009}$, $\sqrt{582169}$.

200. $\sqrt{135424}$, $\sqrt{956484}$, $\sqrt{57198969}$.

201. $\sqrt{68492176}$, $\sqrt{422220304}$. **202.** $\sqrt{285970396644}$.

203. Εκςιγίςτε, γιατί κάθε ακέρεος αριθμος, πυ τελιόνι ςε κάπιο απ' τα τέςερα πςιφία: 2, 3, 7 κε 8, δε μπορι να ίνε ακριβες τετράγονο.

III. Εκςαγογι τετραγονικις ρίζας κατα προςένκιςι.

114. Διο γνορίζματα, όταν δεν ίνε δινατο να εκςαχτι ακριβις τετραγονικι ρίζα. Ακριβι τετραγονικὶ ρίζα ενος δομένυ αριθμυ, ακέρευ ί κλαζματικυ, ονομάζυμε τον αριθμο, το τετράγονο τυ οπίυ ίνε ίςο με το δομένο. Θα ιποδίκςυμε τα γ ν ο ρ ί ζ μ α τ α, πυ μας βοιθύνε να καταλάβυμε, ότι δεν ίνε δινατο να βρεθι ι ρίζα ενος δομένυ αριθμυ με ακρίβια.

α) Αν δε μπορύμε απ' το δομένο αριθμο να εκςάγυμε ακριβι ακέρεα ρίζα, (μένι διλ. κατάλιπο), τότε δε θα μπορέςυμε να βρύμε κε ακριβι κλαζματικι ρίζα τυ αριθμυ αφτυ, επιδι κάθε κλάζμα, πυ δεν ίνε ίςο με ακέρεο αριθμο, πολαπλαςιαζόμενο επι τον εαφτό-τυ, θα δόςι πάλι γινόμενο κλάζμα κι όχι ακέρεο.

β) Επιδι ι ρίζα τυ κλάζματος ίνε ίςι με τι ρίζα τυ αριθμιτι διερύμενι δια τις ρίζας τυ παρονομαςτι, γι' αφτο ίνε αδίνατο να βρεθι ακριβις ρίζα τυ ανάγογυ κλάζματος, ςε περίπτοςι πυ δε μπορι να εκςαχθι ι ρίζα απ' τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι. Λ. χ. ι ακριβις ρίζα τον κλαζμάτον $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ κε $\frac{11}{51}$ ίνε αδίνατο να βρεθι, επιδι ςτο πρότο κλάζμα δεν μπορύμε να τιν εκςάγομε απ' τον παρονομαςτι, ςτο δέφτερο, απ' τον αριθμιτι κε ςτο τρίτο, απ' τον αριθμιτι κε τον παρονομαςτι.

Οταν απο μερικυς αριθμυς δεν εκςάγετε ι ρίζα, τότε βρίςκυμε αφτι κατα προςένκιςι. Για ρίζες κατα προςένκιςι θα μιλίςυμε τόρα.

115. Ρίζα κατα προςένκιςι 1. Τετραγονικι ρίζα αριθμυ (ακέρευ ί κλαζματικυ — το ίδιο κάνι) κατα προςένκιςι μονάδας, ονομάζυμε τον αριθμο, πυ ικανοπιι τις ακόλυθες διο απετίςις: 1) Το τετράγονό-τυ νἄνε μικρότερο απ' το δομένο αριθμο (ί ίςο μ' αφτον), 2) Το τετράγονό-τυ, αφκςιμένο κατα 1 νἄνε μεγαλίτερο απ' το δομένο αριθμο. Μ' άλα λόγια, τ ε τ ρ α γ ο ν ι κ ι

ρίζα αριθμυ κατα προσένκισι 1, ονομάζυμε τι μεγαλίτερι ακέρεα τετραγονικι ρίζα, πυ χορι ςτο δομένο αριθμο, διλ. τι ρίζα εκίνι, πυ βρίςκαμε ςτο προιγύμενο κεφάλεο. Τι ρίζα αφτι ονομάζυμε κατα προςένκιςι μονάδας, επιδι για να βρεθι ι ακριβις ρίζα πρέπι να προςτεθι ς' αφτι κ' ένα κάπιο κλάζμα, μικρότερο απ' το 1. Επομένος, αν αντι τιν άγνοςτι ακριβι ρίζα πέρνυμε τι ρίζα αφτι κατα προςένκιςι, θα κάνυμε λάθος, μικρότερο απ' τι μονάδα.

Ας ιποθέςυμε, πος θέλυμε να βρύμε τιν τετραγονικι ρίζα τυ 395,74 κατα προςένκιςι 1. Τότε, χορις να δόςυμε προςοχι ςτο κλάζμα, εκςάγομε τι ρίζα μόνο απ' τον ακέρεο αριθμο:

$$\sqrt{3'95} = 19$$

```
      1
29 | 29 5
 9 | 26 1
   |_____
      3 4
```

Το 19 θάνε ι ζιτύμενι ρίζα, επιδι

$$19^2 < 395{,}74, \text{ ενο } 20^2 > 395{,}74.$$

Κανόνας. Για να εκςαχτι ι τετραγονικι ρίζα αριθμυ κατα προςένκιςι μονάδας, αρκι να βρεθι ι μεγαλίτερι ακέρεα ρίζα απο το ακέρεο μέρος τυ δομένυ αριθμυ.

Ο αριθμος, πυ βρίκαμε με τον παραπάνο τρόπο, ίνε ρίζα με έλιπςι. Ονομάζετε έτςι, επιδι ίνε μικρότερι απ' τιν ακριβι ρίζα κατα ένα κλαζματικο αριθμο (μικρότερο απ' το 1). Αν ι ρίζα αφτι αφκςιθι κατα 1, τότε θάχυμε ρίζα με ιπερβολι (ί ιπεροχι), ρίζα διλ. πυ θάνε μεγαλίτερι απ' τιν ακριβι κατα ένα κλαζματικο αριθμο, μικρότερο απ' το 1.

116. Τετραγονικι ρίζα αριθμυ κατα προςένκιςι $\frac{1}{10}$. Ας ιποθέςυμε, πος ζιτύμε να βρεθι ι $\sqrt{2{,}35104}$ κατα προςένκιςι $\frac{1}{10}$ (με έλιπςι). Αφτο ςιμένι, πος ζιτύμε να βρύμε ένα τέτιο δεκαδικο κλάζμα, πυ να αποτελιέτε απο ακέρεες μονάδες κε δέκατα κε πυ να ικανοπιι τις διο ακόλυθες απετίςις: 1) το τετράγονότυ να μιν ίνε μεγαλίτερο απ' το 2,35104 κε 2) το τετράγονότυ, αν το αφκςίςυμε κατα $\frac{1}{10}$, να γίνι μεγαλίτερο απ' το 2,35104.

$$\sqrt{2{,}3\ 5'104} = 1{,}5$$

```
  √2,3 5'104 = 1,5
     1
25 | 1 3'5
 5 | 1 2 5
   |------
       1 0
```

Ρια να βρύμε τέτιο κλάζμα, βρίςκυμε ςτιν αρχι τι ρίζα με προςένκιςι 1, εκςάγυμε διλ. τι ρίζα μονάχα τυ ακέρευ μέρυς τυ αριθμυ, 2. Θάχυμε 1 (κε κατάλιπο 1). Γράφυμε ςτι ρίζα το πςιφίο 1 κε βάζυμε ίςτερα απ' αφτο ιποδιαςτολι. Τόρα θα ζιτίςυμε το πςιφίο τον δέκατον. Για το ςκοπο αφτο κατεβάζυμε ςτο κατάλιπο 1 τα πςιφία 35, πυ ςτέκυντε δεκςια απ' τιν ιποδιαςτολι, κ' εκςακολυθύμε να εργαζόμαςτε έτςι, όπος θα εργαζόμαςτε, ςε περίπτοςι πυ θέλαμε να εκςάγυμε τι ρίζα τυ ακέρευ αριθμυ 235. Το πςιφίο 5, πυ θα βρύμε, το γράφυμε ςτι ρίζα (ςτι θέςι τον δέκατον). Τα λιπα πςιφία τυ ιπόριζυ (104) δε μας χριάζοντε. Ο αριθμος 1,5 θάνε ι ρίζα τυ δομένυ αριθμυ με προςένκιςι $\frac{1}{10}$. Αφτο θα φανι απ' τα παρακάτο: αν βρίςκαμε τιν ακέρεα ρίζα τυ 235 κατα προςένκιςι 1, τότε θάχαμε 15. Επομένος:

$$15^2 \leqslant 235, \text{ ενο } 16^2 > 235).$$

Διερόντας με το 100 όλυς τυ αριθμυς αφτυς, θάχυμε:

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2{,}35, \qquad \frac{16^2}{100} > 2{,}35,$$

διλ.

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leqslant 2{,}35, \qquad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2{,}35,$$

ίτε

$$1{,}5^2 \leqslant 2{,}35, \qquad 1{,}6^2 > 2{,}35.$$

Επομένος,

$$1{,}5^2 < 2{,}35104, \qquad 1{,}6^2 > 2{,}35\,104^*$$

Ο αριθμος λιπον 1,5 θάνε το δεκαδικο κίνο κλάζμα, πυ ονομάςαμε ρίζα κατα προςένκιςι $\frac{1}{10}$.

Με τιν ίδια πάλι μέθοδο θα βρύμε τις ακόλυθες ρίζες κατα προςένκιςι 0,1:

---

* Απ' τιν πρόςθεςι τυ αριθμυ 0,00104 το διπλο ςιμίο $\leqslant$ πρέπι ν' αλάκςι, όπος ίνε φανερο ςε ςιμίο $<$ κε το ςιμίο $>$ μένι (επιδι 0,00104 $<$ 0,01).

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{57{,}40} = 7{,}5} \\ \multicolumn{2}{l}{49} \\ 145 & 84'0 \\ 5 & 72\,5 \\ & 11\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{0{,}30} = 0{,}5 \\ 25 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{0{,}03'8} = 0{,}1 \\ 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

117. Τετραγονικι ρίζα κατα προσένκισι $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ.

Ας ιποθέσυμε, πος θέλυμε να βρύμε κατα προσένκισι $\frac{1}{100}$ τι $\sqrt{248}$ με έλιψι. Αφτο σιμένι: πρέπι να βρεθι ένα τέτιο δεκαδικο κλάζμα, πυ ν' αποτελίτε απο ακέρεες μονάδες, δέκατα κ' εκατοστα, κε να ικανοπιι εκσάλυ, τις ακόλυθες διο απετίσις: 1) το τετράγονό-τυ να μιν ίνε μεγαλίτερο απ' το 248 κε 2) το τετράγονό-τυ νάνε μεγαλίτερο απ' το 248, σε περίπτοσι πυ αφκσίσυμε το κλάζμα αφτο κατα $\frac{1}{100}$. Τέτιο κλάζμα θα βρεθι με τον ακόλυθο τρόπο: βρίσκυμε πρότα τον ακέρεο αριθμο, ίστερα το ψιφίο τον δέκατον κε τελεφτέα κε το ψιφία τον εκατοστον. Ι ρίζα τυ ακέρευ αριθμυ θάνε 15 ακέρεες μονάδες. Για να βρεθι τόρα το ψιφίο τον δέκατον, πρέπι, όπος μάθαμε, να κατεβάσυμε στο κατάλιπο 23 ακόμα 2 ψιφία, πυ βρίσκυντε δεξια απ' τιν ιποδιαστολι).

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{2'\,4\,8',00'\,00} = 15{,}74} \\ \multicolumn{2}{l}{\;\;1} \\ 25 & 1\,4'8 \\ 5 & 1\,2\,5 \\ 307 & 2\,3\,0'0 \\ 7 & 2\,1\,4\,9 \\ 3144 & 1\,5\,1\,0'0 \\ 4 & 1\,2\,5\,7\,6 \\ & \;\;2\,5\,2\,4 \end{array}$$

Επιδι στο παράδιγμα, πυ πίραμε, δεν ιπάρχυν τέτια ψιφία, στι θέσι-τυς βάζυμε μιδενικα. Συνεχίζοντας τιν πράξι, έτσι όπος θα κάναμε κε σε περίπτοσι, πυ θάτανε το 24 800 ακέρεος αριθμος, θα βρύμε το ψιφίο τον δέκατον 7. Μένι μονάχα να βρύμε το ψιφίο τον εκατοστον. Για να βρεθι κι αφτο, κατεβάζυμε στο κατάλιπο 151 πάλι 2 μιδενικα κ' εξακολυθύμε τιν εξαγογι τις ρίζας έτσι, όπος θα κάναμε κε σε περίπτοσι, πυ το 2 480 000

θάτανε ακέρεος αριθμος. Θάχυμε 15,74. Απ' τα παρακάτο θα φανι, πος ο αριθμος αφτος ίνε πραγματικα ι ρίζα τυ 248 με προσένκιςι $\frac{1}{100}$ με έλιπςι. Αν βρίςκαμε τι μεγαλίτερι ακέρεα τετραγονικι ρίζα τυ 2 480 000, τότε θάχαμε 1574. Επομένος:

$$1574^2 \leqslant 2\,480\,000, \text{ ενο } 1575^2 > 2\,480\,000.$$

Διερόντας όλυς τυς όρυς με 10 000 ($= 100^2$), θάχυμε:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000, \qquad \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

διλ.

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leqslant 248{,}0000, \quad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248{,}0000,$$

ίτε

$$15{,}74^2 \leqslant 248, \qquad 15{,}75^2 > 248.$$

Ο αριθμος λιπον 15,74 ίνε κίνο το δεκαδικο κλάζμα, πυ ονομάςαμε ρίζα τυ 248 κατα προςένκιςι $\frac{1}{100}$.

Εφαρμόζοντας τι μέθοδο αφτι κε ςε περίπτοςι, πυ θέλυμε να βρύμε ρίζα κατα προςένκιςι $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κ. τ. λ., θα φτάςυμε ςτον ακόλυθο κανόνα.

Κανόνας. Για να εκςαχτι ι τετραγονικι ρίζα ενος αριθμυ (ακέρευ ί δεκαδικυ) κατα προςένκιςι $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ., βρίςκυμε πρότα τιν τετραγονικι ρίζα με προςένκιςι μονάδας, εκςάγοντας τι ρίζα τυ ακέρευ (αν δεν ιπάρχι ακέρεος, γράφυμε ςτι ρίζα 0 ακέρει).

Ιςτερα βρίςκυμε το πςιφίο τον δέκατον. Για το ςκοπο αφτο κατεβάζυμε ςτο κατάλιπο διο πςιφία τυ ιπόριζυ, πυ βρίςκυντε δεκςια απ' τιν ιποδιαςτολι (αν δεν ιπάρχυν, γράφυνε ςτο κατάλιπο διο μιδενικα) κ' εκςακολυθύμε τιν εργαςία με τον ίδιον απαράλαχτα τρόπο, όπος κε ςε περίπτοςι, πυ εκςάγυμε τι ρίζα τον ακέρεον αριθμον. Ο αριθμος, πυ θα βρεθι, γράφετε ςτι ρίζα ςτι θέςι τον δέκατον.

Κατόπι βρίςκυμε κε το πςιφίο τον εκατοςτον. Για το ςκοπο αφτο γράφυμε πάλι ςτο κατάλιπο διο

πσιφία, πυ βρίσκυντε δεξια απο κίνα, πυ κατεβάσαμε λίγο πριν κ.τ.λ.

Κ'έτσι, όταν εκσάγυμε ρίζα απο ακέρεο αριθμο, πυ έχι δεκαδικο μέρος, πρέπι να τον **χορίζυμε σε διπσίφια τμίματα τόσο στ' αριστερα (στο ακέρεο μέρος τυ αριθμυ), όσο κε δεξια (στο δεκαδικο μέρος).**

Π α ρ α δ ί γ μ α τ α.

1. Να βρεθυν κατα προσένκισι $\frac{1}{100}$ ι ρίζα: α) $\sqrt{2}$, β) $\sqrt{0{,}3}$,

α) $\sqrt{2} = 1{,}41$

```
     1
24 | 1 0'0
 4 |   9 6
28 1 | 40'0
   1 | 28 1
       11 9
```

β) $\sqrt{0{,}30} = 0{,}54$

```
     25
104 | 50'0
  4 | 41 6
       8 4
```

2. Να βρεθύνε κατα προσένκισι $\frac{1}{10000}$:

α) $\sqrt{0{,}38472}$ β) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

α) $\sqrt{0{,}38'47'20} = 0{,}6202$

```
     36
122 | 24'7
  2 | 24 4
1240 2 | 3200'0
     2 | 2480 4
          719 6
```

β) $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0{,}42'85'71'42}$

$\sqrt{0{,}42'85'71'42} = 0{,}6546$

```
       36
125  | 68'5
  5  | 62 5
1304 | 6 0 7'1
   4 | 5 2 1 6
1308 6 | 8 5 54'2
     6 | 7 8 51 6
            7026
```

Στο τελεφτέο παράδιγμα το κλάζμα $\frac{3}{7}$ το τρέπσαμε σε δεκαδικο με 8 δεκαδικα πσιφία, για νάχυμε τα 4 τμίματα, πυ χριάζυντε για τιν έβρεσι τον 4 δεκαδικον πσιφίον τις ρίζας.

Σ ι μ ί ο ς ι. Ιπάρχυν ιδιέτερι πίνακες, όπυ ίνε καταχοριμένες (με οριζμένι ακρίβια) ι τετραγονικες ρίζες πολον αριθμον. Σε πρόλογο, πυ έχυνε ςινίθος ι πίνακες αφτι, ιποδίχνετε ο τρόπος τις χρίςις-τυς.

118. Εκςαγογι τις ρίζας τον κινον κλαζμάτον.

Ι τετραγονικι ρίζα τυ ανάγογυ κλάζματος ίνε δινατο να εκςαχτι με ακρίβια μονάχα τότε, όταν κ' ι διο όρι τυ κλάζματος ίνε ακριβι τετράγονα (§ 114). Σε τέτια περίπτοςι, αρκι να εκςαχτι χοριστα ι ρίζα τυ αριθμιτι κε χοριστα τυ παρονομαστι Δ. χ.:

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{3}{4}.$$

Τιν κατα προσένκιςι τετραγονικι ρίζα τον κινον κλαζμάτον βρίςκυμε εφκολότερα, αν τρέπςυμε απο πριν το κινο κλάζμα ςε δεκαδικο με δεκαδικα πςιφία δ ι ο φ ο ρ ε ς π ε ρ ι ς ό τ ε ρ α απ' τον αριθμο τον δεκαδικον πςιφίον τις ζιτύμενις ρίζας. Ας ιποθέςυμε λ.χ., πος θέλυμε να βρεθι ι $\sqrt{2\frac{3}{7}}$ κατα προσένκιςι 0,01, διλ. με διο δεκαδικα πςιφία ίςτερα απ' τιν ιποδιαςτολι. Για το ςκοπο αφτο τρέπυμε το $2\frac{3}{7}$ ςε δεκαδικο κλάζμα με 4 δεκαδικα πςιφία $2\frac{3}{7}=2,4285...$ κ' εκςάγυμε τι ρίζα τυ 2,4285 κατα προσένκιςι 0,01:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{2,4285}=1,55 \\
 & 1 \\
25 & 14'2 \\
5 & 12\,5 \\
305 & 1\,78'5 \\
5 & 1\,52\,5 \\
 & \quad 26\,0
\end{array}$$

Ι έβρεςι τις ρίζας μπορύςε να γίνι κε με τον ακόλυθο ακόμα τρόπο, πυ θα μεταχιριςτύμε ςτο παρακάτο παράδιγμα:

Να βρεθι ι $\sqrt{\frac{5}{24}}$ κατα προσένκιςι.

Κάνυμε τον παρανομαςτι ακριβες τετράγονο. Για το ςκοπο αφτο, αρκι να πολαπλαςιαςτύνε κ' ι διο όρι τυ κλάζματος επι τον πα-

ρονομαςτι 24. Στιν περίπτοςι όμος αφτι μπορύμε να εργαςτύμε διαφορετικα. Αναλίυμε το 24 ςε γινόμενο πρότον παραγόντον: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Απ' τιν ανάλιςι αφτι γίνετε φανερο, πος αν το 24 πολαπλαςιαςτι επι το 2 κε επι το 3, τότε κε κάθε πρότος παράγοντας τυ γινομένυ θα επαναλιφτι επι τον εαφτό-τυ άρτιες φορες κε επομένος, ο παρονομαςτις θα γίνι τετράγονο.

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Μένι τόρα να βρύμε τι $\sqrt{30}$ κατα προςένκιςι μιας κάπιας μονάδας κε να διερέςυμε το εκςαγόμενο με το 12. Πρέπι όμος νάχυμε ιπόπςι, πος με τον τρόπο αφτο μικρένι κε το κλάζμα, πυ δίχνι το βαθμο τις ακρίβιας. Αν λ.χ. βρίςκυμε τιν $\sqrt{30}$ κατα προςένκιςι $\frac{1}{10}$ κε διερέςυμε το εκςαγόμενο με το 12, τότε θα βρύμε τιν τετραγονικι ρίζα τυ $\frac{5}{24}$ κατα προςένκιςι $\frac{1}{120}$ $\left(\text{ρίζα με έλιπςι } \frac{54}{120}, \text{ ρίζα με ιπεροχι } \frac{55}{120}\right)$.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

204. $\sqrt{13}$ κατα προςένκιςι 1.
$\sqrt{13}$ » 0,1.
$\sqrt{13}$ » 0,001.

205. $\sqrt{101}$ » $\frac{1}{100}$.
$\sqrt{0{,}8}$ » 0,01.

206. $\sqrt{0{,}0081}$ κατα προςένκιςι $\frac{1}{100}$. $\sqrt{19{,}0969}$ κατα προςένκιςι $\frac{1}{100}$.

207. $\sqrt{356}$ κατα προςένκιςι πρότα 1, κ' ίςτερα 0,1 κε 0,01.

208. Βρέςτε κατα προςένκιςι 0,01 τιν τετραγονικι ρίζα τον ακόλυθον κλαζμάτον, αφυ τρέψετε το καθένα απ' αφτα ςε δεκαδικο με τον απετύμενο αριθμο τον δεκαδικον ψηφίον:

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \frac{5}{12}, \frac{7}{250}.$$

209. Χορις να μετατρέψετε τα κλάζματα ςε δεκαδικα, βρέςτε το ίδιο, αφυ κάνετε πρότα τον παρονομαςτι ακριβες τετράγονο. Καθορίςτε το λάθος, πυ γίνετε με τον προιγύμενο τρόπο.

210. Βρέςτε τις ρίζες:

$\sqrt{0{,}3}$, $\sqrt{5{,}7}$ $\left(\text{κε τα διο κατα προςένκιςι } \frac{1}{10}\right)$.

$\sqrt{2{,}313}$ $\sqrt{0{,}00264}$ $\left(\text{κε τα διο κατα πρὸςενκςι } \frac{1}{100}\right)$.

Ιςτορικες πλιροφορίες.

Το ςιμίο $\sqrt{\ }$, για τιν παράςταςι τις πράκςις, με τι βοίθια τις οπίας βρίςκυμε τι ρίζα, το καθιέροςε πρότος ςτα μαθιματικα ο Ρ ύ ν τ ο λ φ, ςτα 1525. Πριν απ' αφτόνε γράφανε όλι τι λέκςι «ρίζα» (λατινικα *radix*). Ι λέκςι αφτι αντικαταςτίθικε αργότερα με το αρχικο τις γράμα, πο πίρε κι αφτο ςτο τέλος τι μορφι $\sqrt{\ }$.

ΜΕΡΟΣ ΕΧΤΟ.

ΕΚΣΙΣΟΣΙΣ ΔΕΦΤΕΡΥ ΒΑΘΜΥ.

119. Πρόβλιμα. Μια βεζινάκατος απομακρίνθικε ςε απόςταςι 28 **χμ** προς τι διέφθινςι τυ ρέβματος τυ ποταμυ κε μονομιας γίριςε προς τα πίςο. Γι' αφτο χριάςτικε το όλο 7 όρες. Να βρεθι, τί ταχίτιτα έχι ι βάρκα στο ακίνιτο νερο, αν ίνε γνοςτὸ, πος το νερο τυ ποταμυ αφτυ κινίτε με ταχίτιτα 3 **χμ** τιν όρα.

Ας ιποθέςυμε, πος ι ταχίτιτα τις κίνιςι τις βάρκας στο ακίνιτο νερο ίνε x **χμ** τιν όρα. Τότε ι βάρκα αφτι θα κινιότανε προς τι διέφθινςι τυ ρέβματος τυ ποταμυ με ταχίτιτα $(x + 3)$ **χμ** τιν όρα κ' ενάντια στο ρέβμα με ταχίτιτα $(x - 3)$ **χμ** τιν όρα. Επομένος τα 28 **χμ** ι βάρκα τα πέραςε ςε $\frac{28}{x+3}$ όρες, όταν κινιότανε προς τι διέφθινςι τυ ρέβματος κε ςε $\frac{28}{x-3}$ όρες, τον κερο, πυ γίριζε πίςο.

Σίμφονα με τον όρο τυ προβλίματος έχυμε τιν εκςίςοςι:

$$\frac{28}{x+3} + \frac{28}{x-3} = 7.$$

Εκςαλίφοντας τυς παρονομαςτες, θἄχυμε:

$$28(x-3) + 28(x+3) = 7(x+3)(x-3),$$

διλ.

$$28x - 84 + 28x + 84 = 7(x^2 - 9) = 7x^2 - 63,$$

ίτε

$$56x = 7x^2 - 63.$$

Ενας όρος τις εκςίςοςις αφτις, πυ βρίκαμε, έχι τον άγνοςτο στι δέφτερι δίναμι, κε δεν ιπάρχι κανένας όρος, πυ νἄχι τον άγνοςτο ςε μεγαλίτερι δίναμι. Τέτια εκςίςοςι, ονομάζετε **εκςίςοςι δέφτερυ βαθμυ ίτε τετραγονικι.**

Με άμεσι αντικατάστασι θα βεβεοθύμε, πος ι εκςίςοσι αφτι έχι τις ρίζες 9 κε —1, απ' τις οπίες μπορύμε να παραδεχθύμε μονάχα τιν πρότι.

Γενικο κανόνα για τι λίςι τον εκςιςόςεον τυ δέφτερυ βαθμυ θα βγάλυμε αργότερα.

120. Κανονικι μορφι τις τετραγονικις εκςίςοςις.

Κάθε τετραγονικι (ί δέφτερυ βαθμυ) εκςίςοςι (κι ακόμα κ' εκςιςόςις μεγαλίτερον βαθμον) αφυ τιν απλοπιίςυμε, μεταφέρυμε όλυς τυς όρυς-τις ςτο αριςτερο μέλος, κάνοντας το δεκςιο μέλος-τις με τον τρόπο αφτο ίςο με το μιδενικο. Ι εκςίςοςι λ.χ., πυ ςχιματίςαμε για τι λίςι τυ προιγύμενυ προβλίματος, ίςτερα απ' τι μεταφορα τον όρον πυ ιποδίκςαμε, θάνε:

$$56x - 7x^2 + 63 = 0,$$

ίτε ίςτερα απ' τι διάτακςι τον όρον ανάλογα με τις κατιύςες δινάμις τυ γράματος x:

$$-7x^2 + 56x + 63 = 0.$$

Ι αριθμι -7, $+56$ κε $+63$ ονομάζοντε ς ι ν τ ε λ ε ς τ ε ς τις τετραγονικις αφτις εκςίςοςις. Απ' τυς ςιντελεςτες αφτυς, ο αριθμος $+63$ ονομάζετε ς τ α θ ε ρ ο ς όρος κι' αριθμι -7 κε $+56$ π ρ ό τ ο ς κε δ έ φ τ ε ρ ο ς ςιντελεςτις (ιποθέτυμε πος ι διάτακςι τον όρον γίνετε πάντοτε ανάλογα με τις κατιύςες δινάμις τυ γράματος x). Ι αριθμι αφτι μπορύνε νάνε θετικι, αρνιτικι κι ακόμα κε μιδενικα (εκςον απ' τον πρότο ςιντελεςτι, πυ δε μπορι νάνε μιδενικο, επιδι ςε ενάντια περίπτοςι ι εκςίςοςι δε θάτανε τετραγονικι). Αν κανένας απ' τυς τρις ςιντελεςτες δεν ίνε ίςος με το μιδενικο, ι εκςίςοςι ονομάζετε π λ ί ρ ι ς. Ι γενικι μορφι τέτιας εκςίςοςις (κ α ν ο ν ι κ ι μ ο ρ φ ι) ίνε ι ακόλυθι:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Πρέπι να ςιμιοθι, πος τον πρότο ςιντελεςτι a μπορύμε να τον κάνυμε πάντοτε θετικο, αντικαταςτένοντας, ςε περίπτοςι πυ θα χριαςτι, τα ςιμία όλον τον όρον με τα αντίθετά-τυς (πολαπλαςιάζοντας μ' άλα λόγια κε τα διο μέλι τις εκςίςοςις με το -1). Ι παραπάνο, λ.χ., εκςίςοςι μπορι να γραφι έτςι:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

121. Λίςι ελιπον τετραγονικον εκςιςόςεον.

Ε λ ι π ι ονομάζυμε τιν τετραγονικι εκςίςοςι, όταν λίπι ο όρος, πυ έχι τον άγνοςτο ςτιν πρότι δίναμι ί ο ςταθερος όρος· μ' άλα λόγια, όταν

ο δέφτερος ςιντελεςτις b ίνε ίςος με μιδενικο, ί όταν ο ςταθερος όρος c ίνε ίςος με το 0. Στιν πρότι περίπτοςι ι εχςίςοςι θάχι τι μορφι $ax^2+c=0$ κε ςτι δέφτερι, $ax^2+bx=0$ (τιχένι κάποτε κε το b κε το c νάνε ίςα με 0. Σε τέτια περίπτοςι ι εχςίςοςι θάχι τι μορφι: $ax^2=0$). Ας εχςετάςυμε τόρα, πός λίνετε χαθεμια απ' αφτες τις ελιπις εχςιςόςις.

1. Ελιπις τετραγονικι εχςίςοςι με μορφι ax^2+ $+c=0$.

Ας πάρυμε τ' ακόλυθα τρία παραδίγματα: α) $3x^2-27=0$. Μεταφέροντας το ςταθερο όρο δεχςια, θάχυμε: $3x^2=27$ κε επομένος $x^2=9$. Σινεπος, το x ίνε ι τετραγονικι ρίζα τυ 9. Διλαδι ι ρίζες ίνε $+3$ κε -3. Αν ςιμφονίςυμε με το ςιμίο $\sqrt{\ }$ να παραςτίςυμε τιν αριθμιτικι τιμι τις ρίζας, τότε θα μπορέςυμε να γράπςυμε: $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$. Ι δομένι λιπον εχςίςοςι έχι διο λίςις. Παραςτένοντας τι μια απ' αφτες με το x_1 κε τιν άλι με το x_2, θάχυμε:

$$x_1=+\sqrt{9}=+3, \quad x_2=-\sqrt{9}=-3.$$

β) $2x^2-0{,}15=0$. Μεταφέροντας το ςταθερο όρο, θάχυμε:

$$2x^2=0{,}15 \text{ κε } x^2=0{,}075.$$

Επομένος:

$$x=\pm\sqrt{0{,}075}.$$

Βρίςχυμε τιν $\sqrt{0{,}075}$ κάτα προςένκιςι λ. χ. $\frac{1}{100}$ (§ 117):

$$\sqrt{0{,}07'5\,0}=0{,}27$$

```
      4
 47 |35'0
  7 |32 9
    |
     ----
      2 1
```

Επομένος: $x_1=0{,}27\ldots$ $x_2=-0{,}27\ldots$

γ) $2x^2+50=0$. Μεταφέροντας το 50 ςτο δεχςιο μέλος τις εχςίςοςις, θάχυμε:

$$2x^2=-50 \cdot \quad x^2=-\frac{50}{2}=-25 \cdot \quad x=\pm\sqrt{-25}.$$

Επιδι ι αρνιτικι αριθμι δεν έχυνε τετραγονικι ρίζα άρτιας τάχςις, ςιμπερένυμε, πος ι εχςίςοςι αφτι δεν έχι λίςις (προγματικες).

Ετςι ι γενικι λίςι τις τετραγονικις εχςίςοςις τυ ίδυς $ax^2+c=0$ θάνε ι ακόλυθι:

$$ax^2 = -c \cdot \quad x^2 = -\frac{c}{a} \cdot \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \cdot$$

Αν ι παράςτασι $-\frac{c}{a}$ ίνε αριθμος θετικος (αφτο θα ςιμβι, όταν ι αριθμι a κε c έχυνε διαφορετικα ςιμία), μπορι να εκςαχτι ι τετραγονικί-τυ ρίζα (ακριβις ί κατα προςένκιςι). Στιν περίπτοςι αφτι το x θάχι διο τιμες, θετικι κε αρνιτικι (με τιν ίδια απόλιτι τιμι). Αν ι παράςτασι $-\frac{c}{a}$ ίνε αρνιτικος αριθμος (αφτο θα ςιμβι, όταν ι αριθμι c κε a έχυν τα ίδια ςιμία), ι παράςτασι δεν έχι πραγματικες ρίζες.

2. Ελιπις τετραγονικι εκςίςοςι με μορφι $ax^2 + bx = 0$. Ας πάρυμε τιν εκςίςοςι $2x^2 - 7x = 0$. Τιν εκςίςοςι αφτι τι γράφυμε έτςι:

$$x(2x - 7) = 0$$

(βγάζυμε διλ. τον κινο παράγοντα έκςο απ' τις παρενθέςις).

Τόρα τυ αριςτερο μέλος τις εκςίςοςις ίνε γινόμενο, ενο το δεκςιο ίνε ίςο με μιδενικο. Για να γίνι το γινόμενο $x(2x - 7)$ μιδενικο, αρκι ο ένας απ' τυς παράγοντές-τυ να γίνι ίςος με το μιδενικο. Θα ίνε διλ. ίτε $x = 0$ ίτε $2x - 7 = 0 \left(\text{οπότε, } x = \frac{7}{2}\right)$.

Επομένος, ι δομένι εκςίςοςι έχι διο λίςις:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{2} = 3\ \frac{1}{2} \cdot$$

Ι γενικι λιπον λίςι τις εκςίςοςις $ax^2 + bx = 0$, θάνε ι ακόλυθι:

$$ax^2 + bx = 0 \cdot \quad x(ax + b) = 0 \cdot$$

$$x_1 = 0 \cdot \quad ax_2 + b = 0 \cdot \quad x_2 = -\frac{b}{a} \cdot$$

3. Ελιπις τετραγονικι εκςίςοςι με μορφι. $ax^2 = 0$. Τέτια εκςίςοςι έχι, όπος φένετε, μόνο τι ρίζα $x = 0$.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

211. $3x^2 - 147 = 0 \cdot \quad \frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \cdot \quad x^2 + 25 = 0.$

212. $\frac{3(x^2 - 11)}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36 \cdot \quad \frac{4}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{1}{3}.$

213. $2x^2 - 7x = 0$· $\frac{3}{7}x^2 + x = 0$· $0{,}2x^2 - \frac{3}{4}x = 0$.

214. $x^2 = x$· $x^2 - 16x = 0$· $7x^2 = 0$· $0{,}7x^2 = 0$.

215. $(x-2)(x-5) = 0$· $x(x+4) = 0$. $3(y-2)(y+3) = 0$.

122. Λίςις πλίρον τετραγονικον εκςιςόςεον. Ας πάρυμε πρότα τιν εκςίςοςι, πυ ςχιματίςαμε για το πρόβλιμα τυ § 119:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

Για να λίςυμε τιν εκςίςοςι αφτι, διερύμε όλυς τυς όρυς-τις με το 7 κε μεταφέρυμε το ςταθερο όρο ςτο δεκςιό-τις μέλος:

$$x^2 - 8x = 9.$$

Προςπαθύμε τόρα να κάνυμε τέλιο τετράγονο το πρότο-τις μέλος. Για να φανι, πός μπορι να γίνι έφκολα ι εργαςία αφτι, μεταςχιματίζυμε το διόνιμο με τον ακόλυθο τρόπο:

$$x^2 - 2x \cdot 4.$$

Το παραπάνο διόνιμο θα γίνι τέλιο τετράγονο, όπος ίνε πια φανερο, αν προςτεθι ς' αφτο ο όρος 4^2. Θάχυμε λιπον:

$$x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2,$$

(το τετράγονο τις διαφορας $x - 4$). Επιδι όμος ςτο αριςτερο μέλος τις εκςίςοςις προςθέςαμε τον αριθμο 4^2 (διλ. 16), πρέπι κε ςτο δεκςιο μέλος να προθέςυμε τον ίδιο αριθμο. Κάνοντας αφτο, θάχυμε:

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16 \text{ διλ. } (x-4)^2 = 25.$$

Αφυ το τετράγονο τις διαφορας $x - 4$ ίνε ίςο με τον αριθμο 25, ςιμπερένυμε, πος ι ίδια ι διαφορα πρέπι νάνε ίςι με τιν τετραγονικι ρίζα τυ 25, διλ. τον αριθμο 5, ί τον αριθμο -5:

$$x - 4 = +\sqrt{25} = +5 \text{ ί } x - 4 = -\sqrt{25} = -5.$$

Μεταφέροντας τόρα τον όρο -4 ςτο δεκςιο μέλος, θα βρύμε διο λίςις:

$$x^1 = 4 + 5 = 9 \text{ κε } x_2 = 4 - 5 = -1.$$

Κ' ι διο αφτες λίςις αλιθέβυν τιν εκςίςοςι, μα ι αρνιτικι λίςι δεν μπορι να γίνι παραδεχτι ςτο πρόβλιμα, επιδι εκι ζιτύμε τιν απόλιτι τιμι τις ταχίτιτας κι όχι τι διέφθινςί-τις.

Ος δέφτερο παράδιγμα ας πάρυμε τιν εκςίςοςι:

$$3x^2 + 15x - 7 = 0.$$

Διερόντας όλυς τυς όρυς με το 3 κε μεταφέροντας το ςταθερο όρο ςτο δεκςιο μέλος τις εκςίςοςις, θάχυμε:

$$x^2 + 5x = \frac{7}{3}.$$

Το διόνιμο $x^2 + 5x$ μπορι να γίνι τετράγονο τυ αθρίζματος διο αριθμον, αν προςτεθι ς' αφτο ο όρος $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Προςθέτοντας τον όρο αφτο κε ςτα διο μέλι τις εκςίςοςις, θάχυμε:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{7}{3} = \frac{75 + 28}{12} = \frac{103}{12}.$$

Απ' αφτο γίνετε φανερο, πος θάνε: $x + \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{103}{12}}$.

Επομένος:

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{103}{12}}, \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{103}{12}}.$$

Εκςάγοντας τιν τετραγονικι ρίζα τυ $\frac{103}{12}$ κατα προςένκιςι, λ.χ, $\frac{1}{10}$, θάχυμε:

$$\sqrt{\frac{103}{12}} = \sqrt{8{,}58\ldots} = 2{,}9\ldots$$

Επομένος:

$$x_1 = -2{,}5 + 2{,}9\ldots = 0{,}4\ldots, \quad x_2 = -2{,}5 - 2{,}9\ldots = -5{,}4\ldots$$

123. Τίπος τον ριζον τις αναγμένις τετραγονικις εκςίςοςις. Ι τετραγονικι εκςίςοςι, πυ ο πρότος-τις ςιντελεςτις ίνε το $+1$, ονομάζετε α ν α γ μ έ ν ι εκςίςοςι. Τέτια μορφι μπορι να πάρι ι εκςίςοςι, όπος ίδαμε παραπάνο, κε ςε περίπτοςι πυ ο πρότος ςιντελεςτις δεν ίνε 1. Για να πάρι τότε ι εκςίςοςι τι μορφι αφτι, αρκι να διερεθυν όλι ι όρι-τις με το ςιντελεςτι αφτον. Ι γενικι μορφι τις αναγμένις εκςίςοςις ίνε ι ακόλυθι:

$$x^2+px+q=0.$$

Θα λίςυμε κε τιν εκςίςοςι αφτι με γράματα, χάνοντας όλυς τυς μεταςχιματιζμυς, πυ ιποδίχςαμε με τα παραδίγματα, πυ αναφέραμε.

Μεταφέροντας το ςταθερο όρο ςτο δεκςιο μέλος τις εκςίςοςις, θάχυμε:

$$x^2+px=-q.$$

Επιδι $px=2x\cdot\frac{p}{2}$, γι' αφτο, αν θέλυμε να τραπι το διόνιμο x^2+px ςε τέλιο τετράγονο, πρέπι να προςθέςυμε κε ςτα διο μέλι τις εκςίςοςις τον όρο $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Τόρα ι εκςίςοςι μπορι να παραςτιθι έτςι:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Εκςάγοντας τιν τετραγονικι ρίζα τον μελον αφτις, θάχυμε:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ κε } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Ο τίπος αφτος μπορι να εκφραςτι έτςι:

Ο άγνοςτος τις αναγμένις τετραγονικις εκςίςοςις βρίςκετε, αν παρθι το μιςο τυ δέφτερυ ςιντελεςτι με αντίθετο ςιμίο κε προςτεθι (ί αφερεθι) ι τετραγονικι ρίζα τυ τετράγονυ τυ μιςυ αφτυ λιγοςτεμένι κατα το ςταθερο όρο.

Πρέπι να θιμιθύμε κε τιν με γράματα κε τιν προφορικι παράςταςι αφτυ τυ τίπυ.

Παραδίγματα:

1. $x^2-x-6=0$. Για να δόςυμε ςτιν εκςίςοςι αφτι μορφι όμια με τα γράματα $x^2+px+q=0$, τιν παραςτένυμε έτςι:

$$x^2+(-1)\,x+(-6)=0.$$

Τόρα ίνε φανερο, πος το παράδιγμα αφτο θάνε: $p=-1$ κε $q=-6$. Επομένος:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3 \cdot \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Επαλίθεπςι: $3^2 - 3 - 6 = 0, \quad (-2)^2 - (-2) - 6 = 0.$

2. $x^2 - 18x + 81 = 0$. Στιν περίπτοςι αφτι θάχυμε: $p = -18$, $q = +81$. Επομένος:

$$x = 9 \pm \sqrt{81 - 81} = 9 \pm 0 = 9.$$

Ι εχςίςοςι αφτι έχι μονάχα μια ρίζα.

3. $x^2 - 2x + 5 = 0$. $x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4}$. Ι ρίζες ίνε φανταςτικες.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

216. $x^2 + 10x + 5 = 2x^2 - 6x + 53$.

217. $x^2 = 6x = 27$.

218. $x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18$.

219. $12x - \frac{6}{x} = 21$.

220. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = 6\frac{5}{7}$.

221. $x + 2 = \frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4} - \frac{4}{5-x} = \frac{3x-1}{4}$.

223. $x + \frac{1}{x-3} = 5$.

224. $\frac{2x}{x-d} = \frac{x-d}{d}$.

225. Πιά τιμι πρέπι νάχι το t για να γίνι το γινόμενο $2t - 5$ επι $t - 4$ ίςο με το άθριζμα $t + 8$;

226. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

124. Γενικος τίπος τον ριζον τις τετραγονικις εκςίςοςις. Ι εκςίςοςι $ax^2 + bx + c = 0$, μπορι να πάρι τι μορφι τις αναγμένις εκςίςοςις ςε περίπτοςι, πυ θα διερεθυν όλιι όριτις με το a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Εφαρμόζοντας τον τίπο τις αναγμένις εκςίςοςις για τι λίςι τις εκςίςοςις αφτις, βρίςκυμε:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Ι παράςταςι αφτι μπορι ν' απλοπιιθι έτςι:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} =$$

$$= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ο τίπος μπορι να εκφραςτι έτςι:

Ο άγνοςτος τις πλίρυς τετραγονικις εκςίςοςις ίνε ίςος με κλάςμα, πυ έχι ος αριθμιτι το δέφτερο ςιντελεςτι παρμένο με αντίθετο ςιμίο, ςιν πλιν τιν τετραγονικι ρίζα τυ τετράγονυ τυ ςιντελεςτι αφτυ, λιγοςτεμένυ κατα το τετραπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ ςιντελεςτι επι το ςταθερο όρο, κε ος παρονομαςτι το διπλάςιο γινόμενο τυ πρότυ ςιντελεςτι.

Ο τίπος αφτος μπορι να ονομαςτι γ ε ν ι κ ο ς, επιδι μπορύμε να τον εφαρμόςυμε κε ςε περίπτοςι, πυ έχυμε να λίςυμε αναγμένες εκςιςόςις (αν ιποθέςυμε $a = 1$) κε ςε περιπτόςις πυ έχυμε να λίςυμε λιπςες τετραγονικες εκςιςόςις (αν ιποθέςυμε $b = 0$ ί $c = 0$).

125. Απλοπίιςι τυ γενικυ τίπυ, όταν ο ςιντελεςτις b ίνε άρτιος αριθμος. Ο γενικος τίπος απλοπιίτε ςε περίπτοςι πυ το b ίνε άρτιος αριθμος. Αν ιποθέςυμε, λ. χ. πος ίνε $b = 2k$, θἄχυμε,

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Στον τίπο αφτο λίπυνε τα πςιφία 4 κε 2, πυ ιπάρχυνε ςτο γενικο.

126. Αριθμος τον ριζον τις τετραγονικις εκςίςοςις. Ι τετραγονικι εκςίςοςι, όπος ίδαμε, έχι κάποτε διο ρίζες, κάποτε μια κε κάποτε ύτε μια (περίπτοςι φανταςτικον ριζον). Οςτόςο ςιμφονίςανε ν' αποδόςυνε ςτις τετραγονικες εκςιςόςις ς' όλες τις περιπτόςις διο ρίζες, έχοντας ιπόπςι, πος ι ρίζες μπορύνε νἄνε κάποτε ίςες κε κάποτε φανταςτικες. Τέτια ςιμφονία δικιολογίτε, γιατι ι τίπι πυ παραςτένυν ι φανταςτικες ρίζες, έχυν τις ίδιες ιδιό-

τιτες, που ανίχυνε κε στις πραγματικες ρίζες. Πρέπι όμος, κάνοντας τις πράξις με τυς φανταστικυς αριθμυς, να οδιγιθύμε απ' τυς κανόνες, που εφαρμόζυμε κε στυς πραγματικυς αριθμυς κε να θεορίσυμε εξσάλυ τιν παράστασι $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Απαράλαχτα έτσι, κι όταν ι εξσίσοσι έχι μια ρίζα, μπορύμε να τι θεορίσυμε ος διο ίσες ρίζες κε ν' αποδόσυμε σ' αφτες όλες πάλι τις ιδιότιτες, που ανίχυνε κε στις διάφορες ρίζες τις εξσίσοσις.

ΑΣΚΙΣΙΣ.

227. $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

228. $(2x - 3)^2 = 8x$.

229. $5x^2 - 8x + 0{,}24 = 0$.

230. $65x^2 + 118x - 55 = 0$.

231. $(x - 3)(x - 4) = 12$.

232. $\dfrac{x}{x + 60} = \dfrac{7}{3x - 5}$.

233. $x + \dfrac{1}{x} = a + \dfrac{1}{a}$.

234. Να βρεθυν τρις διαδοχικι άρτιι αριθμι, που το άθριζμα τον τετραγόνον-τυς νάνε ίσο με 776.

235. Να βρεθυν ί πλεβρες ενος ορθογονίυ, που έχι εμβαδο 48 τετρ. σμ κε περίμετρο 28 σμ.

236. Να βρεθυν ι πλεβρες ενος ορθογονίυ τριγόνυ, αν ίνε γνοστο, πος αφτες παραστένυντε με τρις διαδοχικυς ακέρευς αριθμυς.

237. Αν ένα πολίγονο έχι n πλεβρες, τότε ο αριθμος όλον τον διαγονίον-τυ θάνε $\frac{1}{2}\, n\,(n - 3)$. Να βρεθι, πόσες πλεβρες έχι το πολίγονο, που ο αριθμος τον διαγονίον-τυ ίνε 54.

238. Ενα αεροπλάνο πέρασε 150 χμ κε μονομιας γίρισε πίσο στο σιμίο απ' όπυ ξεκίνισε. Για να περάσι τιν απόστασι αφτι (ιποθέτυμε, πος ι κίνισί-τυ όλο τον κερο ίτανε εφθίγραμι) χριάστικε το όλο 4 όρες. Ι πτίσι-τυ προς τα εμπρος ίτανε ενάντια στο ρέβμα τυ ανέμυ, μα προς τα πίσο, κατα το ρέβμα. Να βρεθι ι ταχίτιτα τυ ανέμυ, αν ίνε γνοστο, πος σε κερο νινεμίας (που δε φισα άνεμος) ι ταχίτιτα τυ αεροπλάνυ ίνε 80 χμ. τιν όρα.

239. Κάμποσα μαντίλια αγοραστίκανε για 60 ρύβλια. Αν με το ποσο αφτο αγοράζονταν τρία μαντίλια παραπάνο, τότε το κάθε μαντίλι θα κόστιζε 1 ρύβλ. λιγότερο. Πόσα ίταν τα μαντίλια, που αγοραστίκανε;

240. Στιν πρότι τάξσι ενος σχολιυ μιραστίκανε 180 φίλα χαρτι εξσίσυ. Στιν δέφτερι τάξσι μιράστικε πάλι τόσο ποσο χαρτιυ κε εξσίσυ. Κάθε μαθιτις τις δέφτερις τάξσις πίρε 6 φίλα χαρτι περισότερο απο κάθε μαθιτι τις πρότις τάξσις. Πόσα φίλα χαρτι πίρε κάθε μαθιτις τις πρότις τάξσις, αν ίνε γνοστο, πος στι δέφτερι τάξσι ίτανε 40 μαθιτες λιγότερι, απ' ότι στιν πρότι;

ΑΠΑΝΤΙΣΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΚΙΣΙΣ.

1. $4a, a^2$. **2.** $6m^2, m^3$. **3.** $x(x-d)$. **4.** $10x+y$. **5.** $100a+10b+c$. **6.** $\frac{ma+nb}{a+b}$. **7.** x^2+y^2, $(x+y)^2$, x^2y^2, $(xy)^2$, $(a+b)(a-b)$, $\frac{m+n}{m-n}$ ἰ $(m+n):(m-n)$. **8.** 84, 44, 552, 336, $9\frac{1}{3}$, $5\frac{3}{5}$. **9.** $3(x+y)(x-y)$. **10.** $3a=2b$, $13+12=25$. **11.** $5+ab-4a$, $a+2x$. **12.** n, $5a^3b^2x^3$. **13.** $6xyz$, $2ax$. **14.** $5x+15$, $7x+7y+7z$. **15.** $\frac{a}{2}+2b-c$, $5a^2b$. **16.** $8x-2y$, $4ax$. **17.** $\frac{a}{b}$, $3x$. **18.** $+10$, -10, $+3$. **19.** -3, $+8$, -2. **20.** 0, -3, $+1$. **21.** -1, -2, $+2$. **22.** $+2$. **23.** 0. **24.** $b-a$, -5 (ζιμία). **25.** $m-n$, -10 (χρέος). **26.** 14, 10, 18, 2. **27.** $a+b$, $m+n$, $5x$. **28.** 12. **29.** $-1\frac{3}{4}$. **30.** $+5$. **31.** $10+(-2)+(-3)+7$. **32.** $10-(-8)$. **33.** $+6$, -14, $+80$. **34.** $-23\frac{3}{8}$, 0,054. **35.** $+1$, -1, $+1$, -1. **36.** 27. **37.** -27. **38.** 0, 0, 0, 0, 0. **39.** $3\frac{1}{16}$. **40.** $+5$, -5, -5, $+5$. **41.** $-a$, -5, x^2. **42.** 0, 0, 0, 0. **43, 44, 45,** δεν χριάζετε απάντιςι. **46.** $10a^3x^3$, $-10a^2bx^2$, $-\frac{3}{8}a^3bx^3$, $-20m^2x^2y^3$. **47.** $a+a$, $ax+ax+ax$, $a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b$, $(a+1)+(a+1)+(a+1)+(a+1)$. **48.** 90, $\frac{13}{15}$, $2\frac{25}{48}$, -28, -936. **49.** 0, 31, -4. **50.** $+1$ κε -1. **51.** $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$. **52.** $2x-16{,}3xy$. **53.** $a+3\frac{1}{2}mxy^2$. **54.** $a-3\frac{1}{2}mxy^2$.

55. $4a^3 - 3a^2b - 13ab^2$. **56.** $x^5 - 7a^2x^3$. **57.** $2z$. **58.** $4x^3 + x^2 + 3x + 1$. **59.** $8a^3 - 11a^2b + 14ab^2 - 3b^3$. **60.** $p^2 + p + 15$. **61.** $4x^2 + 3y^2 - y - 1$. **62.** $\frac{1}{4}x^2 - x + \frac{4}{5}$. **63.** $4a^2 + 4b^2 - c^2$. **64.** $x + y$· $2m - 2n$. **65.** $b - 2c$. **66.** $4x^2$. **67.** $a - (b + c - d)$, $a - b + (-c + d)$, $a - (b + c) + d$. **68.** $15a^8b^7c$, $\frac{5}{8}a^2x^6$. **69.** $0{,}81a^8b^2x^3$, $a^6b^8c^3$. **70.** $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$, $8a^9b^3a^6$. **71.** $0{,}01x^{2m}y^6$, $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. **72.** $6a^3b - 4ab^4 + 2abc$. **73.** $25a^3b - 20a^4b^2 + 15a^5b^3 - 35a^6b^4$. **74.** $am + bm - cm - an - bn + cn$, $6a^2 - 3ab + 2ab^2 - b^3$. **75.** $2a^2 - \frac{1}{2}b^2$, $x^3 - y^3$. **76.** $x^3 + y^3$. **77.** $6x^2 + 5xy - 6y^2$, $y^4 - 1$. **78.** $x^6 + 1008x + 720$. **79.** $x^9 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$. **80.** $x^6 - a^6$. **81.** $a^2 + 2a + 1$, $1 + 4a + 4a^2$, $x^2 + x + \frac{1}{4}$. **82.** $9a^4 + 6a^2 + 1$, $0{,}01m^2x^2 + mx^3 + 25x^4$. **83.** $25a^2 - 20a + 4$, $9x^2 - 12ax - 4a^2$, $9a^4 - 3a^2 + \frac{1}{4}$ **84.** $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,201$, $997^2 = (1000 - 3)^2 = \dots = 994\,009$ κ.τ.λ. **85.** $4m^2 - 12mn + 9n^2$, $9a^4x^2 - 24a^3xy + 16a^2y^2$, $0{,}04x^6 - 0{,}15x^3 + \frac{9}{64}$. **86.** $\frac{1}{4}x^4 - 3\frac{1}{2}x^3 + \frac{49}{4}x^2$, $0{,}0625p^2 - 0{,}1pq + 0{,}04q^2$. **87.** $a^2 - 1$, $4a^2 - 25$. **88.** $4x^2 - 9$, $1 - a^4$. **89.** $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$, $(4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2) = 16x^4 - y^4$. **90.** $[(m + n) - p]\,[(m + n) + p] = (m + n)^2 - p^2$, $a^2 - (b + c)^2 = a^2 - b^2 - 2bc - c^2$. **91.** $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$, $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$, $125 + 225x + 135x^2 + 27x^3$. **92.** $\frac{1}{8}m^3 - \frac{3}{2}m^2 + 6m - 8$, $\frac{27}{64}p^3 + \frac{9}{16}p^2g + \frac{1}{4}pg^2 + \frac{1}{27}g^3$, $125 - 225x + 135x^2 - 27x^3$. **93.** $2a^2xy$, $-\frac{3}{5}x^2$. **94.** $-\frac{6}{5}a^3$, $3a^{m-1}b^2$. **95.** $\frac{16}{3}a + 8b - 16a^2b^4$. **96.** $9x^2 - 6ax + a^2$. **97.** $1 - 2y + y^2 - y^3$. **98.** $x - 4$, $y + 1$. **99.** $3x^2 - 2$. **100.** $3ax^3$. **101.** $x - a$. **102.** $2(a + x)$, $a(x + y)$, $2y(2y - 3x)$. **103.** $2a(2x - y)$, $3xy(2x + 3y)$. **104.** $3ab(4a - 3ab + 2b^2)$, $xy(y - 7 + 4x)$. **105.** $(m + n)(m - n)$, $(a + 1)(a - 1)$, $(1 + a)(1 - a)$. **106.** $(x + 2)(x - 2)$,

$(m+3)(m-3)$, $(2x+y)(2x-y)$. **107.** $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$, $(0{,}1a^3+3)(0{,}1a^3-3)$, $3a(a+4b^4)(a+2b^2)(a-2b^2)$. **108.** $(x-y+a)(x-y-a)$, $[3(a+2b)+1][3(a+2b)-1]$, $(a+b+c)(a-b-c)$. **109.** $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy$, $4(x-y)(3x+y)$. **110.** $(x-y)^2$, $(m+n)^2$. **111.** $(a+b)^2$, $(a-2b)^2$. **112.** $(x+4)^2$, $(x+1)^2$. **113.** $5a(a-2b)^2$. **114.** $(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)$, $a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$. **115.** $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$, $a(c-d)+b(d-c)=a(c-d)-b(c-d)=(c-d)(a-b)$. **116.** $a(a+b)-(a+b)=(a+b)(a-1)$, $xz+xy-3y-3z=x(y+z)-3(y+z)=(y+z)(x-3)$. **117.** $4mn-2nx+xy-2my=2n(2m-x)+y(x-2m)=2n(2m-x)-y(2m-x)=(2m-x)(2n-y)$, $(2a-3)(2a-3)(2a+3)$. **118.** $\frac{5x}{7y}$, $\frac{3ba}{10m}$, $\frac{8a^2}{11b}$, $\frac{25m}{59n}$.

119. $\frac{9ab}{10x^2}$, $\frac{14a^3}{15b}$, $\frac{12x-1}{4a-4b}$. **120.** $\frac{17(a+b)}{34}=\frac{a+b}{2}$, $\frac{2(9a-7)}{6-a}$. **121.** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$, $\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$. **122.** $\frac{x-1}{x}$, $\frac{3a^2}{b-a}$, $\frac{a-1}{b-2}$. **123.** $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$, $\frac{m^2-1}{m-1}$. **124.** $-\frac{3a}{6}$, $-\frac{5x^2}{3}$, $-\frac{a-1}{b}$, $-\frac{a}{x-2}$, $-\frac{m^2-n^2}{m-n}$. **125.** $\frac{1}{x}$, $\frac{2}{3m}$, $\frac{2a}{3b}$, $\frac{3xy}{8}$. **126.** $\frac{3b}{2x}$, $\frac{ac}{4b}$, $\frac{16axy^3}{15}$. **127.** $\frac{b}{a+b}$, $\frac{3y}{x-y}$, $\frac{a+2}{a-2}$.

128. $\frac{a+1}{a-1}$, $\frac{1}{x+3}$, $\frac{a}{a-1}$. **129.** $\frac{x-1}{2x(x+1)}$, $\frac{a+x}{3b-cx}$, $\frac{5a}{a-x}$.

130. $(a+b)(a-b)$, $\frac{1}{y^2-1}$. **131.** $\frac{18}{6a}$, $\frac{4a}{6a}$, $\frac{4x^2}{12xy}$, $\frac{3y^2}{12xy}$, $\frac{x^3}{4x}$, $\frac{16}{4x}$.

132. $\frac{4bc}{2abc}$, $\frac{6ac}{2abc}$, $\frac{ab}{2abc}$, $\frac{105b^3x^2}{60a^2b^3x}$, $\frac{40a^3x}{60a^2b^3x}$, $\frac{48a^3b^4}{60a^2b^3x}$.

133. $\frac{20mx^3y^2}{12a^2bcmx^2y}$, $\frac{9a^3b^2c}{12a^2bcmx^2y}$, $\frac{2a^3bx}{8a^3b^2}$, $\frac{y}{8a^3b^2}$, **134.** $\frac{15x^3}{40abx^3}$, $\frac{120abx^4}{40abx^3}$, $\frac{8a^2b}{40abx^3}$. **135.** $\frac{3(x+y)}{6(x^2-y^2)}$, $\frac{2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$, $\frac{m-1}{m^2-1}$,

$\frac{2}{m^2-1}$, $\frac{3(m+1)}{m^2-1}$. **136.** $\frac{2}{(x-1)^2}$, $\frac{3a(x-1)}{(x-1)^2}$, $\frac{2x-1}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{2(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$. **137.** $\frac{3x}{84a^3b^2}$, $\frac{4aby}{84a^3b^2}$ $\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{2ab(a+b)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{b}{b(a^2-b^2)}$, **138.** $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$, $\frac{6+5x}{3x^2}$, $\frac{2a-2x-5}{4}$. **139.** $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$. **140.** $\frac{1+x}{2}$, $\frac{5x-6}{3}$, $\frac{5-2x}{3}$. **141.** $\frac{1}{1-4x^2}$. **142.** $\frac{2a^2b-ab-2b^2-a^2}{a(a+b)(a-b)}$.

143. $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$. **144.** $-\frac{6b}{7x^2}$, $\frac{1}{5(1+a)x}$. **145.** $\frac{12p^2g^2x^2y^2}{n^4a^3}$, $2a(x-1)$. **146.** $\frac{a(a+2b^2)}{b^2}$, $\frac{9b^2c^2x^2}{16a^2z^2}$. **147.** $\frac{3a^3}{5mp}$, $15a^2x^2y$.

148. $\frac{1}{5(a-b)}$, $\frac{x+y}{x-y}$. **149.** I ιςότιτα 3-ι, 4-ι κε 6-ι ίνε εκςιςὸςις, ι επίλιπες — ταφτότιτες. **150.** 17, 5, 5. **151.** 27, 9, 12. **152.** 3, 2, $\frac{13}{20}$. **153.** 2,7, 50. **154.** 9, -3, -4. **155.** 1, $5\frac{3}{7}$.

156. $2\frac{6}{11}$. **157.** $7\frac{1}{13}$. **158.** 2. **159.** $-17\frac{25}{27}$. **160.** 1348 κε 1200.

161. 20, 30, 50. **162.** $2\frac{1}{2}$. **163.** 12,8 χγ. κε 19,2 χγ. **164.** 15 χμ κε 18 χμ. **165.** 0. **166.** $\frac{c}{2(a-b)}$. **167.** $\frac{4-4a}{b-3}$.

168. $h=\frac{2q}{b_1+b_2}$ **169.** $x=2$, $y=1$, $x=1$, $y=-2$, $x=-3$, $y=-3$. **170.** $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$, $x=5$, $y=1$, $x=7$, $y=2$. **171.** $x=\frac{35}{13}$, $y=-\frac{23}{13}$. **172.** $x=\frac{c}{a+bm}$, $y=\frac{mc}{a+bm}$, $x=\frac{a+bm}{mn-1}$, $y=\frac{an+b}{mn-1}$. **173.** $a=3$, $b=-5$. **174.** 1 ρὺβλ. 10 καπ. κε 40 καπ. **175.** 40 κε 25. **176.** 200, 11 χμ. **177.** $1\frac{2}{3}$ μ, $13\frac{1}{3}$ μ κε $9\frac{2}{3}$ μ, $9\frac{1}{3}$ μ. **178.** $x=2$, $y=3$, $z=5$. **179.** $x=3\frac{1}{2}$, $y=2\frac{1}{4}$, $z=4$. **180.** $x=4$, $y=0$, $z=5$. **181.** $x=51$, $y=76$, $z=1$. **182.** $x=8$, $y=10$,

$z=5$. **183.** $x=36$, $y=6$. **184.** $x=2$, $y=4$, $z=1$, $u=5$. **185.** $x=6$, $y=12$, $z=8$. **186.** Προςθέτοντας τι 2-ι εκςίςοςι με τιν 3-ι, θἄχυμε: $2x=32$, $x=16$. Αφερόντας απ' τιν 1-ι εκςίςοςι τι 2-ι, θἄχυμε: $2z=11$, $z=5\frac{1}{2}$. Τελεφτέα, αφερόντας απ' τιν 1-ι εκςίςοςι τιν 3-ι, θα βρύμε: $2y=15\frac{1}{2}$, $y=7\frac{3}{4}$. **187.** $1\frac{7}{8}$ ρύβλ, $\frac{1}{2}$ ρυβλ., 5 ρύβλ.

188. 133, 150, 76. **189.** ± 10, $\pm 0{,}1$, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{4}$, $\pm a$, $\pm x$.

190. 5, 27, a, $1+x$. **191.** $+3$, -3, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-0{,}1$.

192. ± 2, $\pm\frac{1}{2}$, ± 3, φανταςτικι αριθμι. **193.** ± 6, $\pm 0{,}25$, $\pm 2ab$, $\pm 3axy^2$. **194.** $-3ab$, $\pm\frac{1}{2}ax$, $\sqrt[5]{a}$ $\sqrt[5]{b}$ $\sqrt[5]{c}$.
195. $\pm a^2$, $\pm 2^2$, $\pm x^3$, $\pm(a+b)^2$. **196.** 2^2, $-a^2$, x^3, $(m+n)^2$.

197. $\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{10}$, $\frac{a^2}{b}$, $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$, $\pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. **198.** $\pm 5a^3bc^2$, $\pm 0{,}6x^2y$, $\pm\frac{1}{2}(b+c)^3x^2$. **199.** 17, 65, 247, 763. **200.** 368, 978, 7563.
201. 8276, 20548. **202.** 534762. **203.** Το τελεφτέο πςιφίο τυ τετράγονυ ακέρευ αριθμυ πρέπι νἄνε ένα απο κίνα τα πςιφία, ςτα οπία τελιόνυν τα τετράγονα τον πρότον 10 αριθμον: 0, 1, 2, 3... 9. Κανένα όμος απ' αφτα τα τετράγονα δεν τελιόνι ύτε ςε 2 ύτε ςε 3, ύτε ςε 7, ύτε ςε 8. **204.** 3, 3,6, 3,606. **205.** 10,05, 0,89. **206.** 0,09, 4,37. **207.** 19, 18,9, 18,89. **208.** 0,77, 0,65, 0,79, 0,65, 0,17. **209.** $\frac{1}{5}\sqrt{15}=$
$=\frac{387}{500}$ (με αχρ. ός $\frac{1}{500}$), $\frac{1}{7}\sqrt{21}=\frac{458}{700}$ (με αχρ. ός $\frac{1}{700}$), $\frac{1}{11}\sqrt{77}=\frac{877}{1100}$ (με αχρ. ός $\frac{1}{1100}$), $\frac{1}{12}\sqrt{60}=\frac{774}{1200}$ (με αχρ. ός $\frac{1}{1200}$), $\frac{1}{250}\sqrt{1750}=\frac{4183}{25000}$ (με αχρ. ός $\frac{1}{25000}$). **210.** 0,5, 2,4, 1,52, 0,05. **211.** ± 7, ± 3, $\pm\sqrt{-25}$. **212.** ± 9, ± 9. **213.** 0 χε $3\frac{1}{2}$, 0 χε $-2\frac{1}{3}$, 0 χε 3,75. **214.** 0 χε 1, 0 χε 16, 0, 0. **215.** 2 χε 5, 0 χε -4, 2 χε -3. **216.** 12 χε 4. **217.** 3 χε -9. **218.** 8 χε $-2\frac{1}{4}$. **219.** 2 χε $-\frac{1}{4}$. **220.** 44 χε -2. **221.** 1 χε -5.

222. 6 κε -3. **223**. 4. **224**. $d(2 \pm \sqrt{3})$. **225**. $t_1 = 6$, $t_2 = 1$. **226**. $\frac{a}{b}$ κε $\frac{b}{a}$. **227**. $2\frac{1}{2}$ κε -1. **228**. $4\frac{1}{2}$ κε $\frac{1}{2}$. **229**. $\approx 1{,}5694$ κε $\approx 0{,}0306$. **230**. $\frac{5}{13}$ κε $-\frac{11}{5}$. **231**. 7 κε 0. **232**. 14 κε -10. **233**. a κε $\frac{1}{a}$. **234**. 14, 16, 18 κε -18, -16, -14. **235**. 6 κε 8. **236**. 3, 4, 5. **237**. 12. **238**. 20 χμ. τιν όρα. **239**. 12. **240**. Κάθε μαθιτις τις τάκςις, όπυ ίνε 60 άτομα, πίρε απο τρία φίλα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.

Σελ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΟΤΟ.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΧΤΙΚΕΣ ΕΝΙΕΣ.

I. Αλγεβρικα σίμβολα.

1. Χρίςι γραμάτον 3
2. Αλγεβρικι παράςταςι . . 5
3. Ι πράκςις, πυ εκςετάζυντε ςτιν άλγεβρα 6
4. Αλγεβρικα ςίμβολα . . . 6
5. Σιρα τον πράκςεον . . . 7

II. Ιδιότιτες τον πρότον τεςάρον αριθμιτικον πράκςεον.

6. Πρόςθεςι 10
7. Αφέρεςι 11
8. Πολαπλαςιαζμος 12
9. Διέρεςι 14
10. Εφαρμογι τον ιδιοτίτον τον πράκςεον 16

ΜΕΡΟΣ ΔΕΦΤΕΡΟ.

ΣΧΕΤΙΚΙ ΑΡΙΘΜΙ ΚΕ ΠΡΑΚΣΙΣ ΠΑΝΟ Σ' ΑΦΤΥΣ.

I. Μεγέθι, πυ μπορύνε να ενοιθύνε κατα διο αντίθετες ένιες.

11. Προβλίματα 18
12. Αλα μεγέθι, πυ μπορύνε να ενοιθύνε κατα διο αντίθετες ένιες 20
13. Σχετικι αριθμι 21
14. Παράςταςι τον αριθμον πάνο ςτον αριθμιτικο άκςονα 21

II. Πρόςθεςι ςχετικον αριθμον.

15. Πρόβλιμα 23
16. Πρόςθεςι διο αριθμον . . 24
17. Διατίποςι τον κανόνον τις πρόςθεςις με άλον τρόπο. 26
18. Πρόςθεςι τριον κε περιςότερον αριθμον 26

III. Αφέρεςι ςχετικον αριθμον.

19. Πρόβλιμα 27
20. Εβρεςι διαφορας, πυ νά'νε ένας απ' τυς προςθετέυς 27
21. Κανόνας τις αφέρεςις . . 29
22. Τίπι διπλον ςιμίον . . . 30
23. Αλγεβρικο άθριζμα κε διαφορα 30
24. Σίνκριςι τον ςχετικον αριθμον ος προς το μέγεθος . 31

IV. Κιριότερες ιδιότιτες τις πρόςθεςις κε αφέρεςις τον ςχετικον αριθμον. (25) . . . 33

V. Πολαπλαςιαζμος ςχετικον αριθμον.

26. Πρόβλιμα 34
27. Πολαπλαςιαζμος επι αρνιτικο αριθμο 36

28. Κανόνας τυ πολαπλαςιαζμυ 38
29 Γινόμενο τριον ί περιςότερον παραγόντον. Σιμίο τυ γινομένυ 39
30. Δίναμι αρνιτικυ αριθμυ . 39

VI. Διέρεςι ςχετικον αριθμον.

31. Οριζμος 41
32. Κανόνας τις διέρεςις . . 41
33. Περιπτόςις ςτις οπίες ο διερετέος ί ο διερέτις ίνε ίςι με το μιδενικο . . . 41

VII. Θεμελιόδικες ιδιότιτες τυ πολαπλαςιαζμυ κε τις διέρεςις (34). . .43

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ.

ΑΚΕΡΕΑ ΜΟΝΟΝΙΜΑ ΚΕ ΠΟΛΙΟΝΙΜΑ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΖΜΑΤΑ.

I. Προκαταρχτικες ένιες.

35. Μονόνιμο κε πολιόνιμο . 47
36. Σιντελεςτις 48
37. Ιδιότιτες τυ πολιονίμυ . 49
38. Αναγογι τον όμιον όρον: 50

II. Αλγεβρικι πρόςθεςι κε αφέρεςι.

39. Πρόςθεςι μονονίμον . . 52
40. Πρόςθεςι πολιονίμον . . 52
41. Αφέρεςι μονονίμον . . . 54
42. Αφέρεςι πολιονίμον . . 54
43. Παράλιπςι τον παρενθέςεον μπροςτα απ' τις οπίες ιπάρχι το ςιμίο + ίτε — . . 55
44. Πός κλίνυμε ςε παρένθεςι μέρι τυ πολιονίμυ . . 56

III. Αλγεβρικος πολαπλαςιαζμος.

45. Πολαπλαςιαζμος μονονίμον 57
46. Τετράγονο κε κίβος μονονίμυ 58
47. Πολαπλαςιαζμος πολιονίμυ επι μονόνιμο 60
48. Πολαπλαςιαζμος πολιονίμυ επι πολιόνιμο 61
49. Διατεταγμένο πολιόνιμο . 63
50. Πολαπλαςιαζμος διατεταγμένον πολιονίμον . . . 63
51. Ανότερος κε κατότερος όρος τυ γινομένυ 64
52 Αριθμος τον όρον τυ γινομένυ 64
53. Μερικι τίπι πολαπλαςιαζμυ τον διονίμον 65
54. Εφαρμογες 66
55. Κίβος τυ αθρίζματος κε κίβος τις διαφορας διο αριθμον 67

IV. Αλγεβρικι διέρεςι.

56. Διέρεςι μονονίμον . . . 68
57. Δίναμι με εκθέτι μιδενικο 69
58. Σιμία αδιερετότιτας τον μονονίμον 70
59. Διέρεςι πολιονίμυ δια μονονίμυ 70
60. Διέρεςι μονονίμυ δια πολιονίμυ 71
61. Διέρεςι πολιονίμυ δια πολιονίμυ 72
62. Διέρεςι διατεταγμένον πολιονίμον 72
63. Σιμία αδιερετότιτας τον πολιονίμον 75

V. Ανάλιςι ςε γινόμενο παραγόντον.

64. Προκαταρχτικι ςιμίοςι . 76
65. Ανάλιςι ακέρεον μονονίμον 76
66. Ανάλιςι πολιονίμον . . 76

VI. Αλγεβρικα κλάζματα.

67. Διαφορα τυ αλγεβρικυ κλάζματος απ' το αριθμιτικο 79

	Σελ.
68. Θεμελιόδικι ιδιότιτα τυ κλάζματος	80
69. Τροπι σίνθετον κλαζμάτον σε απλα	81
70. Αλαγι τον σιμίον τον όρον τυ κλάζματος	82
71. Απλοπίισι τον κλαζμάτον	83
72. Τροπι ετερόνιμον κλαζμάτον σε ομόνιμα . . .	84
73. Πρόσθεσι κε αφέρεσι κλαζμάτον	86
74. Πολαπλασιαζμος κλαζμάτον	88
75. Τετράγονο κε κίβος κλάζματος	89
76. Διέρεσι κλαζμάτον . .	89
77. Σιμιόσις	90

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ.

ΕΚΣΙΣΟΣΙΣ ΠΡΟΤΥ ΒΑΘΜΥ.

I. Γενικες ιδιότιτες τον εκσισόσεον.

78. Ισότιτες κε ιδιότιτές-τυς	91
79. Ταφτότιτα	92
80. Εκσίσοσι	92
81. Ισοδίναμες εκσισόσις . .	94
82. Πρότι ιδιότιτα τον εκσισόσεον	95
83. Πορίζματα	96
84. Δέφτερι ιδιότιτα τον εκσισόσεον	96
85. Πορίζματα	98
86. Πολαπλασιαζμος ί διέρεσι κε τον διο μελον τις εκσίσοσις επι μια κε τιν ίδια αλγεβρικι παράστασι .	99
87. Κσένες ρίζες	99

II. Εκσισόσις με ένα άγνοστο.

88. Λίσι εκσισόσεον 1-υ βαθμυ με ένα άγνοστο . .	100
89. Ενια σχίματιζμυ εκσισόσεον	103
90. Εκσισόσις με γράματα .	105

III. Σιστίματα εκσισόσεον πρότυ βαθμυ.

Σίστιμα διο εκσισόσεον με διο άγνοστυς.

	Σελ.
91. Πρόβλιμα	107
92. Κανονικι μορφι εκσίσοσις πρότυ βαθμυ με διο άγνοστυς	108
93. Αόριστες εκσισόσις με διο άγνοστυς	109
94. Σίστιμα εκσισόσεον . .	110
95. Μέθοδος τις αντικατάστασις	110
96. Μέθοδος τις αλγεβρικις πρόσθεσις	112
97. Σίστιμα εκσισόσεον με σιντελεστες με γράματα	113

Σίστιμα τριον εκσισόσεον με τρις άγνοστυς.

98. Κανονικι μορφι εκσίσοσις πρότυ βαθμυ με τρις άγνοστυς	115
99. Αόριστες εκσισόσις με τρις άγνοστυς . . .	115
100. Σίστιμα τριον εκσισόσεον με τρις άγνοστυς . .	117
101. Μέθοδος τις αντικατάσις	117
102 Μέθοδος αλγεβρικις πρόσθεσις	117

Ιδιέτερες περιπτόσις σιστιμάτον εκσισόσεον.

103. Περίπτοσι στιν οπία όλι ι άγνοστι δεν ιπάρχυνε σε καθεμιά απ' τις εκσισόσις	119
104. Περίπτοσι στιν οπία όλι ι άγνοστι δίνυντε με μορφι κλαζμάτον . . .	119
105. Περίπτοσι στιν οπία ίνε καλο να προστεθυν όλες ι δομένες εκσισόσις . .	121

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΤΟ.

ΕΚΣΑΓΟΓΙ ΤΙΣ ΤΕΤΡΑΓΟΝΙΚΙΣ ΡΙΖΑΣ.

I. Θεμελιόδικες ιδιότιτες τον ριζον.

106. Οριζμος τις ρίζας . . 124
107. Αριθμιτικι ρίζα . . . 125
108. Αλγεβρικι ρίζα . . . 125
109. Εκςαγογι τις ρίζας τυ γινομένυ, τις δίναμις κε τυ κλάζματος . . . 127

II. Εκςαγογι τις τετραγονικις ρίζας τον αριθμον.

110. Προκαταρχτικες παρατιρίςις 129
111. Εκςαγογι τις ρίζας ακέρευ αριθμυ, μικρότερυ απ' το 10 000, μα μεγαλίτερυ απ' το 100 . 130
112. Εκςαγογι τις ρίζας ακέρευ αριθμυ, μεγαλίτερυ τυ 10 000 133
113. Αριθμος τον πςιφίον τις ρίζας. 136

III. Εκςαγογι τετραγονικις ρίζας κατα προσέγκιςι.

114. Διο γνορίζμανα, όταν δεν ίνε δινατο να εκςαχτι ακριβις τετραγονικι ρίζα . . 137
115. Ρίζα κατα προςένκιςι . 137
116. Τετραγονικι ρίζα αριθμυ κατα προςένκιςι $\frac{1}{10}$ . . 138
117. Τετραγονικι ρίζα κατα προςένκιςι $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ. 140
118. Εκςαγογι τις ρίζας τον κινον κλαζμάτον . . 143

ΜΕΡΟΣ ΕΚΤΟ.

ΕΚΣΙΣΟΣΙΣ ΔΕΦΤΕΡΥ ΒΑΘΜΥ.

119. Πρόβλιμα 146
120. Κανονικι μορφι τις τετραγονικις εκςίςοςις . 147
121. Δίςι ελιπον τετραγονικον εκςιςόςεον . . . 147
122. Δίςι πλίρον τετραγονικον εκςιςόςεον . 150
123. Τίπος τον ριζον τις αναγμένις τετραγονικις εκςίςοςις 151
124. Γενικος τίπος τον ριζον τις τετραγονικις εκςίςοςις 153
125. Απλοπίιςι τυ γενικυ τίπυ, όταν ο ςιντελεςτις b ίνε άρτιος αριθμος . . 154
126. Αριθμος τον ριζον τις τετραγονικις εκςίςοςις . 154
Απαντίςις ςτις αςκίςις 156

Главный редактор Х. КАЧАЛОВ

Редактор Ф. ГРИГОРИАДИ

Ответ. по корректуре С. АСАНОВ Техред. У. ГРИГОРИАДИ

Сдано в набор 7/II-1937 г. Подпис. к печ. 3/III—1937 г.
Издание № 259 Уполкрайлит Г—12
Формат бумаги 62×94 1/16 Об'ём печ. лист. 10 3/8
Тираж 1000+90. Заказ № 207.
Цена книги 70 к., переплет 30 к.

Типография „Коммунистис“, ст. Крымская 1937 г.

Тираж 1 з.
Цена 1 р.

На греческом языке

А. КИСЕЛЕВ

АЛГЕБРА

Учебник для начальной школы

Часть I

6-ой и 7-ой классы

СКЛАД ИЗДАНИЯ
Ростов на Дону,
ул. Московская, 53
— КОГИЗ —